



Nuno André Martins Deusdado

Mestre em Engenharia Civil

Método do Lagrangeano Aumentado aplicado ao desenvolvimento de Formulações de Elementos Finitos para Análise Limite

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil

Orientador: Mário Jorge Vicente da Silva,
Professor Auxiliar, FCT/UNL
Coorientador: Armando Manuel Sequeira Nunes Antão,
Professor Associado, FCT/UNL

Júri

Presidente: Prof. Doutor João Carlos Palma Goes
Arguentes: Prof. Doutor António José de Magalhães Silva Cardoso
Prof. Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida
Vogais: Prof. Doutor Mário Jorge Vicente da Silva
Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

outubro, 2017

Método do Lagrangeano Aumentado aplicado ao desenvolvimento de Formulações de Elementos Finitos para Análise Limite

Copyright © Nuno André Martins Deusdado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha mulher.

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui o meu sincero agradecimento a todas as pessoas que de várias formas contribuíram para ultrapassar as diversas fases deste trabalho de investigação, contribuindo para que o culminar da tese de doutoramento se tornasse numa realidade. Contudo, gostaria de agradecer de uma forma especial a algumas dessas pessoas.

Ao professor Mário Vicente da Silva e ao professor Armando Antão, respetivamente meu orientador e coorientador científico, muito obrigado por todos os ensinamentos transmitidos, todas as conversas e principalmente por todo o estímulo e apoio demonstrado para a conclusão deste trabalho.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) pelo financiamento prestado através de uma Bolsa de Doutoramento (SFRH/BD/85854/2012), bem como à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL) em especial ao Departamento de Engenharia Civil (DEC) por garantir todas as condições necessárias ao bom desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Nuno Guerra, com quem foi um enorme prazer ter a cadeira Mecânica das Estruturas Geotécnicas (MEG) bem como todas as oportunidades de colaboração em artigos que contribuíram para a divulgação deste trabalho. À professora Paula Amaral por me explicar todos os conceitos referentes à cadeira de Otimização Não Linear (ONL) bem como sobre outros que ultrapassaram os objetivos da cadeira. Ao professor Rocha de Almeida pelo ensinamentos transmitidos na cadeira Análise Não Linear de Estruturas (ANLE). À Maria do Rosário Duarte, por nunca me negar apoio às inúmeras solicitações colocadas disponibilizando sempre prontamente a sua ajuda. Ao professor Pedro Medeiros por me deixar assistir à cadeira Computação Paralela e Distribuída (CPD), contribuindo para a minha formação nesta área.

Aos meus companheiros e ex-companheiros de investigação, André Almeida, André Oliveira, André Rodrigues, Cláudia Ferreira, Fernando Jorne, Filipe Ribeiro, Hugo Fernandes, Leonardo Rodrigues, Mariana Barros, Micael Inácio, Nuno Dinarte, Nuno Mamede e Ruben Rosário que fizeram com que estes quatro anos fossem passados de uma forma mais descontraída.

A todos os meus amigos, em especial ao Edu, à Joaninha, ao Sérgio, à Dalila, ao João, à Becas e ao Diogo por me ensinarem o verdadeiro significado do lema de vida “Viver cada dia como se fosse o último”.

Para finalizar, agradeço a toda a minha família, particularmente aos meus pais, ao

meu irmão, ao meu avô, à Faustina e ao Vitó por todo o carinho e por serem o meu porto seguro. Por fim, gostaria de deixar a minha enorme gratidão à Sofia, que é ao mesmo tempo a mulher da minha vida, a minha esposa e principalmente a minha melhor amiga, por todo o amor e dedicação, sem sombra de dúvida foi a minha fonte de inspiração para nunca desistir deste objetivo.

Resumo

A determinação da carga máxima suportada por uma estrutura, sem que seja induzida a sua rotura, assume um papel importante no dimensionamento estrutural. A estimativa desta carga limite pode ser feita através de diversos métodos, sendo a Análise Limite a técnica mais promissora para estruturas caracterizadas por uma elevada ductilidade e sujeitas a carregamentos estáticos.

A verificação dos pressupostos impostos pelo Teorema Estático e Teorema Cinemático da Análise Limite resultam invariavelmente em problemas de otimização convexas não lineares. A solução destes dois problemas permite a obtenção de estimativas estritamente interiores e exteriores ao conjunto das cargas de colapso. Propõe-se então, pelos princípios da dualidade, uma nova abordagem de resolução destes dois problemas através de uma formulação unificada. A génese desta formulação reside no Método de Direção Alternada de Multiplicadores. Este método consiste, basicamente, na separação do campo pretendido em dois campos distintos permitindo que o problema original se divida em dois sub-problemas (global e local). Por fim, procede-se à compatibilização dos campos resultantes através do método do Lagrangeano aumentado.

A ferramenta desenvolvida permite a obtenção de estimativas de cargas de colapso de elevada precisão, correspondentes a forças de superfície ou de massa, aplicadas a estruturas que podem ser definidas por diversos tipos de materiais caracterizados pelo respetivo critério de cedência. Sendo que este processo iterativo é executado sempre que necessário através de técnicas de processamento paralelo, que tiram partido das propriedades do algoritmo. A eficiência, robustez e versatilidade deste modelo ficou verificada nos problemas bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) analisados, demonstrando que a ferramenta desenvolvida pode ser usada para problemas geotécnicos mais complexos e reais.

Palavras-chave: Análise Limite, Teorema Estático, Teorema Cinemático, Lagrangeano Aumentado, Método de Direção Alternada de Multiplicadores, Elementos Finitos

Abstract

The prediction of the maximum load that can be supported by a structure, without inducing its failure, is fundamental to structural design. The search for this load can be made by several methods. For the analysis of mechanical structures where a static loading is applied and that present a ductile behavior, the limit analysis theorems have proven to be the most promising strategy comparing with other methods.

The verification of the assumptions made by Static and Kinematic Theorem invariably lead to nonlinear convex optimization problems. Solving these problems allow the determination of strict lower and upper bound of the exact collapse load. By the principles of duality, it's proposed a new unified approach to solve these two problems. The genesis of the developed formulation lies in the alternating direction method of multipliers. This method consists in the decomposition of the goal field in two independent fields, allowing to split the large original problem in a set of two subproblems (global and local). Finally, to enforce the compatibility between the two arising fields, the augmented lagrangian method is used.

The developed tool allows the generation of estimations with highly precision of the true collapse load, regarding the surface or body forces applied to structures that can be defined by several types of materials, characterized by the yielding criteria. This iterative algorithm also represents an efficient parallelization scheme that can be used whenever is necessary. The efficiency, robustness, and versatility of the methodology proposed is illustrated with several 2D and 3D problems, demonstrating that it can be used in more complex and realistic geotechnical problems.

Keywords: Limit Analysis, Static (Lower Bound) Theorem, Kinematic (Upper Bound) Theorem, Augmented Lagrangian, Alternating Direction Method of Multipliers, Finite Elements

Índice

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Símbolos	xxv
Lista de Siglas	xxxiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Metodologia	3
1.4 Organização do documento	4
2 Problema da Análise Limite	7
2.1 Introdução	7
2.2 Geometria e fronteira do corpo	7
2.3 Comportamento do material	8
2.3.1 Material Isotrópico	8
2.3.2 Reologia do Material	9
2.4 Critério de Cedência	9
2.5 Escoamento Plástico	12
2.6 Postulado de Estabilidade de Drucker	13
2.7 Funções de Dissipação	16
2.8 Carregamentos	16
2.9 Teoremas da Análise Limite	18
2.9.1 Otimização Matemática	20
2.9.2 Problema de otimização subjacente ao Teorema Estático	21
2.9.3 Problema de otimização subjacente ao Teorema Cinemático	22
2.9.4 Dualidade	23
3 Revisão Bibliográfica	27
3.1 Introdução	27

3.2	Teorema Estático da Análise Limite	28
3.3	Teorema Cinemático da Análise Limite	31
3.4	Adaptabilidade	34
4	Formulação de Elementos Finitos	37
4.1	Introdução	37
4.2	Método de Direção Alternada de Multiplicadores	38
4.2.1	Minimização global	39
4.2.2	Minimização local	40
4.2.3	Atualização do multiplicador de Lagrange	41
4.2.4	Critério de Paragem	41
4.2.5	Extensões da formulação clássica	43
4.2.5.1	Estimativa inicial do Parâmetro de Penalidade	43
4.2.5.2	Variação do Parâmetro de Penalidade	43
4.2.5.3	Variação Testada	45
4.3	Problema Primal	45
4.3.1	Formulação do Teorema Cinemático	45
4.3.2	Formulação do Teorema Estático	50
4.3.2.1	Domínio (Semi-)Infinito	56
4.3.3	Densidade da Matriz do Sistema Governativo	62
4.3.3.1	Formulação do Teorema Cinemático	62
4.3.3.2	Formulação do Teorema Estático	63
4.4	Problema Dual	65
4.4.1	Formulação do Teorema Cinemático	65
4.4.2	Formulação do Teorema Estático	68
4.4.2.1	Domínio (Semi-)Infinito	71
4.5	Semelhança das Formulações	72
4.5.1	Minimização Global	73
4.5.2	Minimização Local	73
4.5.3	Atualização do Multiplicador de Lagrange	74
4.5.4	Cálculo dos Resíduos	75
5	Implementação Numérica	77
5.1	Introdução	77
5.2	Método de Direção Alternada de Multiplicadores	78
5.2.1	Minimização global	78
5.2.2	Minimização local	79
5.2.2.1	Critério de Tresca	80
5.2.2.2	Critério de Tresca truncado em tração	83
5.2.2.3	Critério de von Mises	86
5.2.2.4	Critério de Mohr-Coulomb	88

5.2.2.5	Critério de Drucker-Prager	91
5.2.3	Atualização do multiplicador de Lagrange	94
5.2.4	Critério de paragem	94
5.2.5	Extensões da Formulação Clássica	94
5.2.6	Paralelização do algoritmo Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM)	95
5.3	Geração da Malha Regular	98
5.3.1	Descontinuidade dos campos de tensão	98
5.3.2	Restrições Linearmente Dependentes	101
5.4	Geração de Elementos de Extensão	110
6	Exemplos Numéricos	115
6.1	Introdução	115
6.2	Problemas bidimensionais	116
6.2.1	Bloco esmagado	116
6.2.2	Cilindro oco sob pressão interna	123
6.2.3	Fundações superficiais corridas	129
6.2.4	Impulsos de terra	133
6.3	Problemas tridimensionais	142
6.3.1	Esfera oca sob pressão interna	142
6.3.2	Estabilidade de Taludes	148
6.3.3	Fundações superficiais quadradas	157
6.3.3.1	Fundações superficiais quadradas: condições não drenadas	159
6.3.3.2	Fundações superficiais quadradas: condições drenadas .	164
7	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	169
7.1	Conclusões	169
7.2	Desenvolvimentos Futuros	171
	Bibliografia	173
A	Equilíbrio no elemento de extensão 2D do tipo unidirecional: elemento quadrilátero	187

Lista de Figuras

2.1	Definição do tipo de problema	8
2.2	Tipos de evolução da superfície de cedência	10
2.3	CrITÉrio de Tresca em planos perpendicular e paralelo ao plano π	12
2.4	CrITÉrio de Tresca truncado em tração em planos perpendicular e paralelo ao plano π	12
2.5	CrITÉrio de von Mises em planos perpendicular e paralelo ao plano π	12
2.6	CrITÉrio de Mohr-Coulomb em planos perpendicular e paralelo ao plano π	13
2.7	CrITÉrio de Drucker-Prager em planos perpendicular e paralelo ao plano π	13
2.8	Normalidade da taxa de deformação plástica	14
2.9	Convexidade da superfície de cedência	14
2.10	Pontos singulares	15
2.11	Domínio dos carregamentos admissíveis	17
2.12	Teoremas da Análise Limite	20
2.13	Interface entre subdomínios	21
4.1	Esquema utilizado na variação do parâmetro de penalidade	44
4.2	Divisão de um elemento quadrangular em quatro triângulos	46
4.3	Divisão de um hexaedro em vinte e quatro tetraedros	47
4.4	Definição do tipo de problema para um domínio (semi-)infinito	56
4.5	Elemento especial 2D do tipo unidirecional	57
5.1	Zonas de projeção para o crITÉrio de Tresca	82
5.2	Zonas de projeção para o crITÉrio de Tresca truncado em tração	85
5.3	Zonas de projeção para o crITÉrio de Tresca truncado em tração (deformação plana)	85
5.4	Zonas de projeção para o crITÉrio de von Mises	87
5.5	Zonas de projeção para o crITÉrio de Mohr-Coulomb	90
5.6	Comparação no plano π do CrITÉrio de Drucker-Prager com o crITÉrio de Mohr-Coulomb	93
5.7	Zonas de projeção para o crITÉrio de Drucker-Prager	93
5.8	Diagrama do algoritmo na vertente paralela	97

5.9	Malha na proximidade da zona definida pela descontinuidade das condições de Neumann	99
5.10	Divisão de um prisma em catorze tetraedros	101
5.11	Malha genérica	101
5.12	Malha definida por n_E^N elementos que confluem num nó interior	102
5.13	Malha definida por n_E^N elementos que confluem num nó exterior	104
5.14	Malha definida por $n_E^N = 4$ elementos que confluem num nó interior (onde existe uma dependência linear)	105
5.15	Malha definida por $n_E^N = 1$ elementos que confluem num nó exterior (onde existe uma dependência linear)	107
5.16	Primeiro método de geração dos elementos de extensão no caso 2D	111
5.17	Segundo método de geração dos elementos de extensão no caso 2D	112
5.18	Método de geração dos elementos de extensão no caso 3D	113
6.1	Problema do bloco esmagado em condições de deformação plana	117
6.2	Problema do bloco esmagado: relação entre a carga de colapso e a carga de colapso limite em função do grau de refinamento	118
6.3	Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 128×256	119
6.4	Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso e distribuição da função de cedência nos elementos para a malha 128×256 analisada segundo o teorema estático (vista aumentada localmente)	120
6.5	Problema do bloco esmagado: ilustração da taxa de convergência do algoritmo MDAM	121
6.6	Problema do bloco esmagado: malha não estruturada de elementos finitos $n_E = 27$	121
6.7	Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha $n_E = 131043$ (malha não estruturada)	122
6.8	Problema do cilindro oco sobre pressão interna em condições de deformação plana	124
6.9	Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento	126
6.10	Cilindro oco sob pressão interna: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 80×240	127
6.11	Cilindro oco sob pressão interna: comparação da evolução da carga de colapso como uma função dos graus de liberdade	129
6.12	Problema de fundações superficiais corridas	130
6.13	Problema de fundações superficiais corridas (caso não drenado): evolução da capacidade resistente da sapata como uma função da distância à superfície do estrato rígido	131

6.14 Problema de fundações superficiais corridas (caso drenado): evolução da capacidade resistente da sapata como uma função da distância à superfície do estrato rígido	133
6.15 Problema de determinação de impulsos de terra em condições de deformação plana	134
6.16 Comparação dos resultados de coeficientes de impulsos obtidos para $\phi' = 30^\circ$ com as soluções de Müller-Breslau [97] e de Absi-Kérisel [2]	136
6.17 Impulsos de terra caso ativo: mecanismos de colapso, distribuição da deformação e da função de cedência nos elementos para $\delta = -20^\circ, 0^\circ$ e 20°	138
6.18 Impulsos de terra caso passivo: mecanismos de colapso, distribuição da deformação e da função de cedência nos elementos para $\delta = -20^\circ, 0^\circ$ e 20°	139
6.19 Representação das fronteiras dos carregamentos limites	141
6.20 Problema da esfera oca sobre pressão interna	143
6.21 Esfera oca sobre pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento	146
6.22 Esfera oca sobre pressão interna: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 20×30	147
6.23 Problema de estabilidade de taludes	149
6.24 Comparação das estimativas obtidas do número de estabilidade com as soluções de Michalowski [98]	151
6.25 Talude com $\beta_T = 60^\circ$, $H/L = 1$ e diferentes valores de ϕ' : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos	153
6.26 Talude com $\beta_T = 60^\circ$, $\phi' = 30^\circ$ e diferentes valores de H/L : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos	154
6.27 Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1$ e diferentes valores de β_T : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos	154
6.28 Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$: evolução gráfica da carga de colapso como uma função da profundidade	156
6.29 Geometria inicial do problema de fundações superficiais quadradas	157
6.30 Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas	160
6.31 Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: regressão quadrática dos resultados	161
6.32 Taxa de convergência de $N_c s_c$ para os diversos casos de n_{B_s} analisados	162
6.33 Evolução do número de dígitos significativos de $N_c s_c$ para o caso $n_{B_s} = 5$ analisado segundo o teorema estático	163
6.34 Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: mecanismos de colapso e distribuição da dissipação plástica nos elementos para a malha mais refinada	163
6.35 Fundações superficiais quadradas em condições drenadas	166
6.36 Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: regressão quadrática dos resultados	167

6.37 Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: mecanismos de colapso e distribuição da deformação plástica nos elementos para a malha $r = 4.4$	168
A.1 Elemento especial 2D do tipo unidirecional (versão alternativa)	187
A.2 Elemento quadrilátero no referencial natural	189

Lista de Tabelas

2.1	Expressão dos critérios de cedência	11
2.2	Definição das funções de dissipação e do espaço auxiliar	16
4.1	Elementos finitos para a formulação do Teorema Cinemático	46
4.2	Nomenclatura do MDAM para a vertente primal do Teorema Cinemático da Análise Limite	48
4.3	Elementos finitos para a formulação do Teorema Estático	51
4.4	Nomenclatura do MDAM para a vertente primal do Teorema Estático da Aná- lise Limite	54
4.5	Elementos de extensão para a formulação do Teorema Estático	58
4.6	Elementos de extensão: equilíbrio no domínio	60
4.7	Elementos de extensão: função de cedência	62
4.8	Elementos finitos para a formulação dual do Teorema Cinemático	67
4.9	Elementos finitos para a formulação dual do Teorema Estático	70
4.10	Elementos de extensão para a formulação dual do Teorema Estático	72
5.1	Condição/Geometria para detetar e remover a dependência linear do operador N no caso bidimensional para nó interior	107
5.2	Condição/Geometria para detetar e remover a dependência linear do operador N no caso bidimensional para nó exterior	109
6.1	Problema do bloco esmagado: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento (malhas estruturadas)	118
6.2	Problema do bloco esmagado: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento (malhas não estruturadas)	122
6.3	Cilindro sob pressão interna: multiplicadores da carga de colapso exatos	125
6.4	Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento	125
6.5	Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso TC como uma função do refinamento (malha com elementos lineares e quadráticos) para $\phi = 30^\circ$	128
6.6	Resultados obtidos de coeficientes de impulsos ativos e passivos para $\phi' = 30^\circ$	135

6.7	Resultados adicionais para $\phi = 30^\circ$ obtidos através da consideração da tensão horizontal constante e da tensão vertical variável	141
6.8	Problema da esfera oca sobre pressão interna: condições de fronteira	143
6.9	Esfera oca sobre pressão interna: multiplicadores da carga de colapso exatos	145
6.10	Esfera oca sobre pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento	145
6.11	Estabilidade de taludes: condições de fronteira	148
6.12	Resultados do número de estabilidade como uma função do rácio H/L para diferentes valores de β_T e ϕ'	151
6.13	Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$: evolução numérica da carga de colapso como uma função da profundidade	155
6.14	Fundações superficiais quadradas: condições de fronteira	158
6.15	Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: propriedades da malha e evolução da carga de colapso como uma função do grau do refinamento	159
6.16	Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: propriedades da malha e evolução da carga de colapso como uma função do grau do refinamento	165

Lista de Algoritmos

1	Esquema clássico do MDAM	39
2	Esquema final do MDAM	43

Lista de Símbolos

A convenção geral adotada ao longo deste documento corresponde a representar os vetores, os tensores e as matrizes através de caracteres em negrito, enquanto para as grandezas escalares são representadas por caracteres em itálico.

\in	Pertence.
\geq	Desigualdade de cada componente entre dois vetores.
\boldsymbol{a}	Vetor resultante da transformação linear.
\mathcal{A}	Matriz de transformação linear.
A	Área do elemento/fronteira.
\boldsymbol{A}_0	Matriz semelhante à identidade, mas nas componentes da diagonal que afetam a deformação por corte apresentam o valor de 1/2.
α	Multiplicador de carga.
α^*	Multiplicador de carga de colapso (exato).
$\hat{\alpha}$	Multiplicador de carga estático associado com o problema do Teorema Cinemático.
α^{TC}	Multiplicador de carga que verifica o Teorema Cinemático.
α^{TE}	Multiplicador de carga que verifica o Teorema Estático.
\mathbf{argmin}	Argumento que minimiza.
\boldsymbol{b}	Forças de massa (variáveis) aplicadas no corpo.
\boldsymbol{b}_0	Forças de massa constantes aplicadas no corpo.
\mathcal{B}	Matriz de transformação linear.
\boldsymbol{B}	Operador discreto de compatibilidade.
$\hat{\boldsymbol{B}}$	Operador discreto generalizado de equilíbrio.
B_S	Dimensão do lado da sapata.
β	Inclinação entre a tensão maior de compressão e o eixo de revolução.
β_T	Inclinação do talude.
β_V	Inclinação do paramento do terreno.
c	Coesão (do material).
\boldsymbol{c}	Vetor resultante da transformação linear.
c_u	Resistência (ao corte) não drenada (do solo).
c'	Coesão efetiva.

\mathcal{C}	Matriz de transformação linear.
C^0	Campo contínuo apenas da função original.
$C(\beta)$	Resistência (ao corte) não drenada (do solo).
\mathcal{C}_c	Espaço auxiliar definido de forma a que o campo das taxas de deformação plástica verifique as restrições de escoamento plástico associado.
C_h	Resistência (ao corte) não drenada horizontal (do solo).
$C_{\pi/4}$	Resistência (ao corte) não drenada $\pi/4$ (do solo).
C_v	Resistência (ao corte) não drenada vertical (do solo).
\mathbf{d}	Vetor de transformação linear.
d^*	Valor ótimo do problema de otimização dual.
$\mathbf{d}\square_{jl}$	Vetor de variação de um campo entre os nós j - l .
\mathcal{D}	Dissipação plástica por unidade de volume.
\mathbf{D}	Operador de equilíbrio diferencial.
\mathbb{D}	Domínio de uma função.
D	Dimensão do problema analisado.
\mathbf{D}^*	Operador de compatibilidade diferencial.
D_2	Dimensão horizontal do nível de terreno horizontal inferior.
D_1	Profundidade do terreno.
δ	Ângulo de atrito solo-estrutura.
Δ	Comprimento da fronteira.
\det	Determinante de um tensor.
\mathbf{e}	Vetor que armazena as componentes do campo de deformação nos pontos dos elementos finitos.
$\hat{\mathbf{e}}$	Vetor que armazena as componentes do campo de deformação nos pontos dos elementos finitos para o Teorema Estático.
\mathbf{e}^*	Valor ótimo da variável \mathbf{e} .
\mathbf{e}_u	Campo/Tensor das deformações correspondentes à estacionariedade da minimização local.
$\tilde{\mathbf{e}}_I, \tilde{\mathbf{e}}_{II}, \tilde{\mathbf{e}}_{III}$	Componentes principais do vetor \mathbf{e} .
\mathbf{E}	Operador de rigidez.
\mathbb{E}	Estado de endurecimento do material.
ϵ^{dual}	Tolerância dual.
ϵ^{primal}	Tolerância primal.
$\bar{\eta}$	Coordenada natural.
f	Critério de cedência (do material).
F	Função do critério de cedência (do material) sem o termo constante.
\mathbf{F}	Vetor de forças nodais variáveis.
\mathbf{F}_0	Vetor de forças nodais constantes.
$\hat{\mathbf{F}}$	Vetor de forças variáveis associados.

$\hat{\mathbf{F}}_0$	Vetor de forças constantes associados.
g	Função objetivo.
g_0	Função objetivo primal.
g_i	Funções das restrições de desigualdade.
g_{\Re}	Parte real da função objetivo g .
γ	Peso próprio (do solo) ou peso volúmico.
γ_{ij}	Componente de distorção do tensor das deformações.
Γ	Fronteira do corpo.
Γ_σ	Fronteira estática (Neumann) do corpo.
Γ_σ^e	Fronteira estática de extensão do corpo.
Γ_u	Fronteira cinemática (Dirichlet) do corpo.
h	Função objetivo.
h_i	Funções das restrições de igualdade.
h_{max}	Máxima largura da aresta de todos os elemento que definem a malha.
h_{\Re}	Parte real da função objetivo h .
H	Altura.
H_{rig}	Profundidade do estrato rígido.
i	Identificação do elemento finito.
i_H	Inclinação da superfície do terreno.
\mathbf{I}	Matriz identidade.
I_1	Invariante linear do tensor das tensões.
\inf	Ínfimo.
j	Identificação do ponto/nó.
J_2	2º Invariante fundamental da parcela deviatórica do tensor das tensões.
J_3	3º Invariante fundamental da parcela deviatórica do tensor das tensões.
k	Número da iteração.
k_y	Tensão de corte de cedência num ensaio de corte puro.
K	Coeficiente de impulso.
K_1, K_2	Parâmetros de anisotropia.
K_a	Coeficiente de impulso ativo.
K_p	Coeficiente de impulso passivo.
K_H	Componente horizontal do coeficiente de impulso.
K_V	Componente vertical do coeficiente de impulso.
κ	Parâmetro de forma.
l	Identificação do nó.
l_{cr}	Comprimento característico.
L	Largura.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{L}	Lagrangiano.
\mathcal{L}_G	Lagrangiano para a minimização global.
\mathcal{L}_L	Lagrangiano para a minimização local.
λ	Multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdade.
Λ	Vetor de transformação linear.
$\hat{\Lambda}$	Vetor de transformação linear dual.
Λ_u	Vetor diferenciável da minimização local para o Teorema Cinemático.
$\Lambda_{I_u}, \Lambda_{II_u}, \Lambda_{III_u}$	Componentes principais do vetor diferenciável Λ_u .
m	Identificação do nó.
\max	Máximo.
\min	Mínimo.
n	Identificação do nó.
\mathbf{n}	Vetor normal exterior à fronteira do corpo normalizado.
n_{dig}	Número de dígitos significativos.
\mathbf{n}_n	Componentes na direção normal do vetor normal exterior normalizado.
n_r	Número de divisões na direção do raio.
\mathbf{n}_t	Componentes na direção tangente do vetor normal exterior normalizado.
n_x	Número de divisões na direção x.
n_y	Número de divisões na direção y.
n_A	Número total de arestas independentes.
n_B	Número total de fronteiras independentes.
n_{BE}	Número total de fronteiras exteriores.
n_{BI}	Número total de fronteiras de interface independentes.
n_{B_S}	Número de divisões em metade da dimensão do lado da sapata, $B_S/2$.
n_D	Número total dependências da matriz \mathbf{N} .
\mathbf{n}_D	Componente diagonal do vetor normal exterior normalizado.
n_E	Número total de elementos finitos.
n_E^F	Número total de elementos em torno da zona descontínua.
n_E^N	Número total de elementos que confluem num nó.
n_N	Número total de nós independentes.
n_N^B	Número total de nós de cada fronteiras.
n_P	Número total de pontos.
n_H	Número de divisões na dimensão da altura, H .
\mathbf{n}_T	Componente tangencial do vetor normal exterior normalizado.
\mathbf{n}_V	Componente vetorial do vetor normal exterior normalizado.
n_φ	Número de divisões na amplitude do ângulo φ .
$n_{\Gamma_u}^B$	Número total de componentes bloqueadas nas fronteiras.
$n_{\Gamma_u}^N$	Número total de componentes bloqueadas nos nós.
\mathbf{N}	Operador de equilíbrio nas fronteiras.

N_c	Coeficiente de capacidade de carga associado ao termo coesivo.
N_γ	Coeficiente de capacidade de carga associado ao comportamento atrítico do solo devido à ação do seu peso próprio.
∇	Gradiente.
ν	Multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de desigualdade.
ν^*	Multiplicadores de Lagrange ν ótimos.
O	Origem da criação dos elementos de extensão.
Ω	Domínio do corpo.
p	Força aplicada (variável).
p^*	Valor ótimo do problema de otimização primal.
p_u	Capacidade de carga da fundação.
P	Zona onde as condições de Neumann são aplicadas de forma descontínua.
\mathcal{P}	Matriz que armazena os termos de penalidade de cada restrição.
ϕ	Ângulo de atrito interno (do material).
ϕ	Função de forma nodal convencional referente a s/\bar{s} .
ϕ'	Ângulo de resistência ao corte.
ϕ_e	Função de forma nodal convencional referente a e .
ϕ_v	Função de forma nodal convencional referente a v .
ψ	Magnitude do tensor da taxa das deformações plásticas.
Φ	Função do potencial plástico.
Π	Potência das forças exteriores variáveis aplicadas no corpo.
Π_0	Potência das forças exteriores constantes aplicadas no corpo.
Π_e	Potência das forças exteriores aplicadas no corpo.
$\Pi_{\mathcal{D}}$	Potência plástica total dissipada.
q	Função objetivo dual.
\mathbf{q}	Parcela deviatórica do tensor das tensões.
q_I, q_{II}, q_{III}	Componentes principais da parcela deviatórica do tensor das tensões.
r	Parâmetro que controla o nível de refinamento da malha.
\mathbf{r}_d	Resíduo dual.
$\hat{\mathbf{r}}_d$	Resíduo primal do problema dual.
r_e	Raio exterior de uma secção circular.
r_i	Raio interior de uma secção circular.
\mathbf{r}_p	Resíduo primal.
$\hat{\mathbf{r}}_p$	Resíduo dual do problema dual.
R	Coeficiente de determinação.
\mathbb{R}^+	Reais positivos.
\mathbb{R}_0^+	Reais positivos incluindo o zero.
\mathbb{R}^n	Domínio real de uma função com n variáveis.

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Parâmetro de penalidade.
s	Vetor que armazena as componentes do campo de tensão globais nos pontos dos elementos finitos.
\widetilde{s}_u	Campo/Tensor das tensões correspondentes à estacionariedade da minimização local.
s_c	Fator de correção relativo à forma da sapata.
s_γ	Fator de correção relativo à forma da sapata.
\hat{s}	Vetor global que armazena as componentes do campo estático virtual nos pontos dos elementos finitos associado com o problema do TC.
\widetilde{s}^*	Valor ótimo da variável \widetilde{s} .
\widetilde{s}	Vetor local que armazena as componentes do campo de tensão locais nos pontos dos elementos finitos.
$\hat{\widetilde{s}}$	Vetor local que armazena as componentes do campo estático virtual nos pontos dos elementos finitos associado com o problema do TC.
\widetilde{s}_{avg}	Tensão média.
$\widetilde{s}_D, \widetilde{s}_E, \widetilde{s}_F$	Norma das componentes $\widetilde{s}_D, \widetilde{s}_E, \widetilde{s}_F$.
$\widetilde{s}_D, \widetilde{s}_E, \widetilde{s}_F$	Componentes do vetor local \widetilde{s} , no referencial formado pela diagonal espacial e pelo plano π .
\widetilde{s}_{EF}	Norma da componente \widetilde{s}_{EF} .
\widetilde{s}_{EF}	Componente do vetor local \widetilde{s} , que considera a soma das contribuições no plano π .
\widetilde{s}_R	Raio do círculo de Mohr do tensor das tensões.
$\widetilde{s}_I, \widetilde{s}_{II}, \widetilde{s}_{III}$	Norma das componentes $\widetilde{s}_I, \widetilde{s}_{II}, \widetilde{s}_{III}$.
$\widetilde{s}_I, \widetilde{s}_{II}, \widetilde{s}_{III}$	Componentes principais do vetor \widetilde{s} .
σ	Campo/Tensor das tensões.
$\widetilde{\sigma}$	Campo/Tensor das tensões.
σ_m	Componente isotrópica (esférica) das tensões ou tensão média.
σ_n	Distribuição de tensões normais.
σ_T	Máxima tensão de tração.
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Componentes principais do tensor das tensões.
t	Forças de superfície externas (variáveis) aplicadas no corpo.
t_0	Forças de superfície externas constantes aplicadas no corpo.
t_y^F	Forças de superfície externas variáveis aplicada no corpo na direção y (carga aplicada).
t_y^S	Forças de superfície externas variáveis aplicada no corpo na direção y (sobrecarga).
τ	Distribuição de tensões tangenciais.
θ	Menor ângulo formado entre o tensor de variação do campo das tensões e a taxa de deformação plástica.

θ_{jl}	Ângulo de inclinação da aresta definida pelos nós $j-l$.
\mathbf{tr}	Traço de um tensor.
\mathbf{u}	Campo/Vetor de deslocamentos.
$\dot{\mathbf{u}}$	Campo/Vetor das velocidades.
u_n	Campo/Vetor das velocidades normais.
u_τ	Campo/Vetor das velocidades tangenciais.
Υ	Densidade de uma matriz.
\mathbf{v}	Vetor que armazena as componentes do campo das velocidades nos nós dos elementos finitos.
$\hat{\mathbf{v}}$	Vetor que armazena as componentes do campo das velocidades nos nós dos elementos finitos para o Teorema Estático.
$\hat{\mathbf{v}}_d$	Vetor que armazena as componentes dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições extra de equilíbrio dos elementos de extensão.
$\hat{\mathbf{v}}_\Gamma$	Vetor que armazena as componentes do campo cinemático virtual nos pontos das fronteiras associado com o problema do Teorema Estático.
$\hat{\mathbf{v}}_\Omega$	Vetor que armazena as componentes do campo cinemático virtual nos centroides dos elementos associado com o problema do Teorema Estático.
V	Volume do elemento.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Campo/Tensor das deformações.
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Taxa de deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Campo/Tensor das deformações elásticas.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Campo/Tensor das deformações plásticas.
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de deformação plástica.
$\dot{\varepsilon}_I, \dot{\varepsilon}_{II}, \dot{\varepsilon}_{III}$	Componentes principais da taxa de deformação plástica.
ϑ	Parâmetro que escala o tamanho do passo de ρ .
μ	Parâmetro que controla a abertura da zona de confiança de ρ .
\mathbf{x}	Variável de otimização.
\mathbf{x}^*	Valor ótimo da variável \mathbf{x} .
ξ	Parâmetro de profundidade de extensão.
$\bar{\xi}$	Coordenada natural.
\mathbf{y}	Multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdade.
\mathbf{y}^*	Multiplicadores de Lagrange \mathbf{y} ótimos.
\mathbf{Y}	Matriz de transformação de coordenadas.
\mathbf{z}	Variável de otimização.
\mathbf{z}_u	Ponto de estacionariedade da minimização local.

Lista de Siglas

2D	bidimensional.
3D	tridimensional.
AL	Análise Limite.
ANLE	Análise Não Linear de Estruturas.
CPD	Computação Paralela e Distribuída.
DALA	Direção Alternada do Lagrangeano Aumentado.
DEC	Departamento de Engenharia Civil.
DOF	Graus de liberdade.
FCT	Fundação para a Ciência e a Tecnologia.
FCT/UNL	Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker.</i>
MDAM	Método de Direção Alternada de Multiplicadores.
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MEG	Mecânica das Estruturas Geotécnicas.
MPI	Método de Ponto Interior.
NDOF	número de graus de liberdade.
ONL	Otimização Não Linear.
PTPM	Princípio do Trabalho Plástico Máximo.
RHS	termo independente do sistema de equações.
SUBLIM3D	<i>Strict Upper Bound LIMit analysis code.</i>
TC	Teorema Cinemático.
TE	Teorema Estático.
TRI	Teorema da Região Inferior.
TRS	Teorema da Região Superior.
TU	Teorema da Unicidade.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O dimensionamento estrutural foca-se cada vez mais na estimativa da carga de colapso real de uma estrutura, dada a existência de uma crescente exigência pelo cálculo estrutural ótimo. Assim, o dimensionamento estrutural começou por ser executado pela teoria da elasticidade mas acabou por se tornar num tópico da teoria da plasticidade. Na literatura encontram-se diversos métodos que permitem estimar a carga de colapso de estruturas geotécnicas, sendo que só um reduzido número destes métodos apresenta uma maior transversalidade na análise aos diversos tipos de problemas geotécnicos.

A primeira destas técnicas surgiu no século XVIII com os trabalhos de Coulomb [26, 56] sendo intitulada por Equilíbrio Limite. Este método apresenta uma grande simplicidade de aplicação, sendo esta a razão pela qual ainda é correntemente utilizado. Contudo apresenta a desvantagem, muito relevante do ponto de vista de dimensionamento, de não ser possível validar a estimativa obtida.

O desenvolvimento da tecnologia de informação originou um aumento da velocidade e capacidade de processamento de dados dos computadores. Este facto, associado à grande evolução de conhecimentos teóricos, permitiu o surgimento de métodos mais avançados e exigentes baseados em problemas matemáticos. Estes métodos podem ser divididos em Análise elasto-plástica incremental e Análise Limite (AL).

A Análise elasto-plástica incremental para além de utilizar a teoria da plasticidade incorpora também os efeitos da elasticidade permitindo assim uma monitorização completa da relação entre a força e o deslocamento, sendo que o carregamento limite apenas é obtido no fim da monitorização. Apresenta-se como um método muito genérico que permite resolver problemas com modelos constitutivos mais avançados (leis de escoamento não associado, comportamento de endurecimento e amolecimento do material e até pode ser formulado segundo grandes deformações) [140].

Por outro lado, a Análise Limite permite obter estimativas apenas no colapso, garantindo limites inferiores através da verificação dos pressupostos do Teorema Estático (TE),

por meio do estabelecimento de um campo de tensões estaticamente admissível e de limites superiores através da verificação dos pressupostos do Teorema Cinemático (TC), por meio do estabelecimento de um campo de velocidades cinematicamente admissível. Os limites obtidos permitem, de um ponto de vista prático, avaliar a qualidade da aproximação calculada, dado que a diferença entre ambos resulta uma estimativa do erro.

No entanto este método apresenta a desvantagem de necessitar de um elevado esforço computacional na resolução de cada um dos problemas resultantes da aplicação dos teoremas da Análise Limite. Este facto levou a que as primeiras formulações discretas de elementos finitos para a Análise Limite apenas surgissem no século XX e foram propostas por diversos autores [85, 5, 86] onde se utilizavam técnicas de programação matemáticas lineares. Desde esse período verificaram-se inúmeros progressos, destacando-se o surgimento de técnicas de programação matemática não lineares que permitiram ultrapassar as limitações apresentadas pelo métodos lineares. Hoje em dia já é muito corrente encontrar algoritmos que permitem a resolução dos teoremas da Análise Limite em condições bidimensionais; por outro lado, para análises tridimensionais o número de algoritmos é muito mais restrito.

O grupo de investigação existente no DEC da FCT/UNL tem contribuindo com assinaláveis avanços científicos para colmatar esta lacuna de algoritmos tridimensionais. Este grupo criou uma ferramenta de cálculo *Strict Upper Bound LIMit analysis code* (SUBLIM3D)¹ que recorre ao Teorema Cinemático da Análise Limite para obter estimativas estritamente exteriores ao conjunto das cargas de colapso para problemas bidimensionais e tridimensionais. Apresenta também a capacidade de recorrer ao processamento paralelo sempre que a dimensão do problema assim o exige, isto é, sempre que exista um elevado número de graus de liberdade (variáveis de decisão) que exceda as capacidades de processamento sequencial.

Os bons resultados numéricos obtidos pela ferramenta SUBLIM3D revelam que o algoritmo implementado apresenta uma formulação robusta, suscitando o interesse em explorar o Teorema Estático da Análise Limite segundo as mesmas ideias, de forma a se obter uma delimitação da carga de rotura real.

1.2 Objetivos

O objetivo global deste trabalho de doutoramento consiste na obtenção de uma ferramenta numérica, baseada nos teoremas da Análise Limite, que permita a determinação rigorosa de estimativas interiores e exteriores do conjunto das cargas de colapso de sistemas mecânicos, caracterizados por um comportamento perfeitamente plástico.

Para que este objetivo seja alcançado é necessário em primeiro lugar, desenvolver uma formulação de elementos finitos baseada no estrito cumprimento do Teorema Estático da

¹Página oficial do programa <http://mario.dec.fct.unl.pt/mario/SUBLIM3d/>.

Análise Limite, que seja capaz de analisar estruturas 2D e 3D.

Após esta etapa, explora-se através dos princípios da dualidade, a relação entre a formulação desenvolvida referente ao Teorema Estático da Análise Limite e a formulação do SUBLIM3D, que é baseada no estrito cumprimento do Teorema Cinemático da Análise Limite, conduzindo à unificação das formulações.

Em seguida, criou-se um algoritmo eficiente para resolução do problema de otimização convexo não linear resultante baseado no Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM) [21], abordagem esta utilizada nos trabalhos de Vicente da Silva e Antão [152, 153, 154].

Depois, procede-se à implementação da formulação desenvolvida em ambiente de processamento sequencial e em ambiente de processamento paralelo para a arquitetura de memória distribuída.

Por fim, valida-se a ferramenta desenvolvida comparando os resultados obtidos com valores anteriormente publicados para diversos problemas de capacidade de cálculo do domínio da Engenharia Civil, tanto bidimensionais, como tridimensionais. Esta tarefa permite aferir a robustez, a versatilidade, a eficiência e a capacidade do modelo proposto.

1.3 Metodologia

No trabalho de Antão [9], descreve-se a génese de uma formulação regularizada que permite estimar superiormente a carga de colapso de estruturas, obtendo-se estimativas inseguras para efeitos de dimensionamento. Este modelo é desenvolvido através da verificação dos requisitos impostos pelo Teorema Cinemático da Análise Limite, resultando para isso, como era espectável, num problema de minimização convexo não linear. Resumidamente, procura-se um campo de velocidades cinematicamente admissível que minimize a potência dissipada plasticamente, obtendo-se então o menor carregamento potencialmente não suportável. Com o trabalho de Vicente da Silva [151] esta formulação sofreu alguns melhoramentos, sendo um deles o ter tornado desnecessário utilizar um algoritmo adicional de pesquisa do parâmetro de carga. Este feito foi alcançado através do método dos multiplicadores de Lagrange, o que permitiu introduzir na função objetivo um termo que normaliza a taxa do trabalho produzido pelas forças variáveis.

Para resolver o problema de otimização resultante estes autores recorreram ao método iterativo de Uzawa, que apresenta inúmeras variantes, destacando-se o Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM). Segundo o algoritmo de Uzawa, a determinação da solução ótima é feita através de uma simples separação de variáveis, campo das velocidades para a aproximação global e o campo da taxa das deformações para a aproximação local. Desta forma obtém-se a solução do problema original através da resolução sucessiva de dois subproblemas de minimização, minimização global e local. Esta estratégia permite que a não-linearidade do problema, devido não só à dissipação plástica presente na função objetivo, como à restrição da lei de normalidade de escoamento

plástico associado imposta ao campo da taxa das deformações, seja tratada localmente de uma forma simples e expedita.

A abordagem a que se pretende dar mais ênfase neste documento corresponde ao Teorema Estático da Análise Limite na qual se estima inferiormente a carga de colapso de estruturas, correspondendo, a uma estimativa a favor da segurança para efeitos de dimensionamento. Este teorema resulta num problema de maximização convexo não linear em que, resumidamente, é procurado um campo de tensões estaticamente admissível que maximize a carga aplicada no corpo, obtendo-se então o maior carregamento potencialmente suportável. Para a resolução deste problema é utilizado a variante do algoritmo de Uzawa (MDAM) tal como no caso do Teorema Cinemático [151], mas neste caso considerou-se a separação do campo das tensões, tanto para a grandeza global, como para a local. Como no caso do Teorema Cinemático, este processo permite a redução do problema não linear (devido à função de cedência) restringindo-o apenas às grandezas locais.

Com ambas as abordagens da Análise Limite operacionais procede-se à unificação do algoritmo de resolução, permitindo resolver os problemas da Análise Limite através do mesmo procedimento numérico, possibilitando a perceção e a clarificação da relação entre o Teorema Estático e o Teorema Cinemático da Análise Limite. Neste trabalho explora-se ainda a introdução de elementos de extensão, estratégia inicialmente proposta por Pastor [115], que permite estimar inferiormente, de uma forma estrita, a carga de colapso de um domínio semi-infinito ou mesmo infinito.

Por fim, explora-se a computação paralela deste algoritmo unificado, de forma a reduzir o custo computacional associado à determinação dos limites inferior e superior da carga de colapso referentes a problemas de grandes dimensões.

1.4 Organização do documento

Este documento está organizado em 7 capítulos. Apresenta-se de seguida uma breve descrição de cada um destes capítulos:

Capítulo 1. Capítulo presente. Procede-se à introdução do presente trabalho de doutoramento, através da definição da motivação, dos objetivos e da metodologia empregue no trabalho desenvolvido.

Capítulo 2. Fornece todos os conceitos teóricos referentes aos teoremas da Análise Limite. Começa com a definição de alguns aspetos da teoria da plasticidade, passa depois pela definição dos pressupostos impostos pelos teoremas da Análise Limite e termina com a explicação dos princípios da dualidade.

Capítulo 3. Expõe-se uma breve revisão bibliográfica sobre a Análise Limite. Apresentando e caracterizando as formulações mais importante baseadas tanto no Teorema

Estático como no Teorema Cinemático da Análise Limite. Refere-se também os avanços que existiram para se modelar domínios semi-infinitos e finitos de forma a se obter um campo de tensões estaticamente admissível.

Capítulo 4. Descreve-se a formulação discreta do Teorema Estático e do Teorema Cinemático da Análise Limite. Assim definem-se inicialmente as várias fases do Método de Direção Alternada de Multiplicadores, seguido da exposição dos problemas originais (primais) e duais, das formulações de limite inferior e superior. Mostram-se também o tipo de elementos finitos utilizados para a classe dos problemas 2D e 3D.

Capítulo 5. Explicam-se os detalhes da implementação numérica do algoritmo unificado proposto. Assim, delineiam-se as estratégias sequenciais e paralelas adotadas em cada uma das fases do Método de Direção Alternada de Multiplicadores. Refere-se também a origem e respetivo modo de resolução de alguns problemas na estrutura do sistema governativo. Por fim, explica-se todo o processo de geração de elementos de extensão, tanto para o caso bidimensional, como tridimensional.

Capítulo 6. Testa-se o desempenho da nova formulação unificada da Análise Limite através de diversos problemas geotécnicos. Numa primeira fase, valida-se a ferramenta numérica através de exemplos em que existe solução analítica. Numa fase posterior, dado que se pretende aferir a as capacidades do algoritmo, analisam-se problemas mais exigentes em termos computacionais.

Capítulo 7. Descrevem-se as principais conclusões retiradas deste trabalho, juntamente com a apresentação de algumas propostas de desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Problema da Análise Limite

2.1 Introdução

Um dos objetivos na análise estrutural corresponde à determinação de uma estimativa da máxima força que pode ser aplicada numa estrutura. O uso de métodos diretos que evitam uma análise incremental, computacionalmente exigente, representam alternativas úteis, competitivas e muito interessantes. Uma importante classe desses métodos é a Análise Limite, que corresponde à abordagem utilizada no presente trabalho. A principal vantagem da Análise Limite é a possibilidade de determinação de limites inferiores e superiores ao carregamento crítico que origina o colapso plástico da estrutura. Assim neste capítulo procede-se ao enquadramento teórico da Análise Limite clássica tridimensional, descrevendo em primeiro lugar, todos os pressupostos definidos por este método, bem como todas as suas consequências e restrições de aplicabilidade. De seguida, definem-se os problemas resultantes da aplicação do Teorema Estático e do Teorema Cinemático da Análise Limite. Por fim, procede-se à definição de alguns conceitos fundamentais estabelecidos na teoria de otimização, permitindo através da dualidade estabelecer uma relação entre os teoremas da Análise Limite.

2.2 Geometria e fronteira do corpo

Considera-se que o corpo analisado, representado na figura 2.1, é definido pelo seu domínio, Ω , e pela sua fronteira, Γ .

Esta fronteira limita o domínio do corpo, sendo constituída por duas partes Γ_u e Γ_σ . A primeira superfície, Γ_u , corresponde à fronteira cinemática ou de Dirichlet onde o campo dos deslocamentos, \mathbf{u} , se encontram bloqueados,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

em cada uma das suas componentes (u_x, u_y, u_z) .

A superfície restante, Γ_σ , corresponde à fronteira estática ou de Neumann onde as cargas de superfície (\mathbf{t}) são aplicadas.

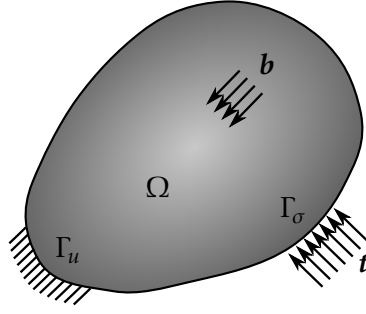


Figura 2.1: Definição do tipo de problema

Como nota, refere-se que existem fronteiras que tanto são fronteiras cinemáticas como estáticas, neste caso são denominadas como fronteiras mistas.

2.3 Comportamento do material

O corpo analisado, representado na figura 2.1, é constituído intrinsecamente por um ou vários materiais. De seguida apresentam-se algumas considerações sobre o comportamento dos materiais analisados.

2.3.1 Material Isotrópico

Em primeiro lugar, considera-se que o comportamento do material estudado é isotrópico, isto é, o material apresenta as mesmas propriedades mecânicas em todas as direções. Como exemplos mais comuns de materiais isotrópicos temos os metais.

O solo, por seu lado, apresenta um comportamento anisotrópico, em especial ortotrópico, isto é, as propriedades mecânicas são caracterizadas por pelo menos dois planos ortogonais de simetria, onde em cada plano as suas propriedades são independentes da direção. Este comportamento está relacionado com os solos de origem sedimentar.

Bishop [16], para o caso de solos respondendo em condições não drenadas, obteve uma fórmula genérica que permite explorar os principais tipos de anisotropia encontrados, na prática, em solos. Esta expressão permite obter a resistência ao corte não drenada do solo, $C(\beta)$, como uma função que depende da inclinação entre a maior tensão de compressão e o eixo de revolução vertical, β , da resistência ao corte não drenada horizontal, $C_h = C(\pi/2)$, da resistência ao corte não drenada vertical, $C_v = C(0)$, e da resistência ao corte não drenada a meio do intervalo, $C_{\pi/4} = C(\pi/4)$:

$$C(\beta) = C_v \left(\cos^2 \beta + K_1 \sin^2 \beta \right) \left(\cos^2(2\beta) + \frac{2K_2}{1+K_1} \sin^2(2\beta) \right) \quad (2.2)$$

sendo os parâmetros de anisotropia (K_1, K_2) definidos por:

$$K_1 = \frac{C_h}{C_v} \quad K_2 = \frac{C_{\pi/4}}{C_v} \quad (2.3)$$

Fazendo uns testes simples, observa-se que a equação (2.2) nem sempre define um domínio convexo, isto é, um domínio onde todo o segmento de reta ligando dois pontos deste conjunto está contido no domínio desta equação. Considerando $K_1 = K_2 = 1$ a expressão (2.2) reduz-se a $C(\beta) = C_v$, que corresponde a considerar o solo como um material isotrópico. Esta simplificação, que é feita usualmente na prática, leva a considerar o solo como um material isotrópico caracterizado apenas pelas suas propriedades ideais.

2.3.2 Reologia do Material

Em segundo lugar, pressupõe-se que o modelo reológico do material é constituído por uma parcela inicialmente elástica seguida de um comportamento plástico.

O tensor das deformações totais, ε , definido pelas suas componentes $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$, pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.4)$$

onde ε^e corresponde à parcela elástica e ε^p à parcela plástica do campo das deformações. As componentes de corte da deformação são definidas pelas correspondentes componentes de distorção, $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. No regime elástico todas as deformações são reversíveis sendo possível estabelecer uma relação unívoca entre as deformações elásticas, ε^e , e o tensor das tensões, σ ,

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (2.5)$$

onde σ , escrito em forma tensorial, é definido pelas suas componentes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ e E representa o operador de rigidez (onde o inverso desta matriz corresponde à matriz de flexibilidade) obtida através da lei de Hooke generalizada [146].

O regime plástico por seu lado corresponde às deformações residuais que se mantêm no corpo, mesmo após a remoção das cargas aplicadas, não podendo neste caso obter uma relação semelhante à da equação (2.5) da elasticidade.

O modelo reológico pode então ser regido pelo critério de cedência do material, f ,

$$f(\sigma, \mathbb{E}) \leq 0 \quad (2.6)$$

onde \mathbb{E} representa o estado de endurecimento do material. Quando a desigualdade desta equação se verifica estamos em regime elástico; a partir do momento em que o estado de tensão se encontra na superfície de cedência (igualdade da equação) e se continua o processo de carregamento, dá-se início à plastificação do material.

2.4 Critério de Cedência

Pelo exposto, percebe-se que o critério de cedência governa o comportamento do material. Assim nesta secção descrevem-se os critérios de cedência utilizados no presente trabalho.

A superfície de cedência pode sofrer diferentes tipos de evolução com o aparecimento de deformações plásticas, ilustrado na figura 2.2. A superfície de cedência inicial, $f(\sigma, \mathbb{E})$,

pode sofrer uma dilatação do seu domínio, $f_2(\sigma, \mathbb{E} + d\mathbb{E})$, o que provoca um aumento da resistência do material sendo correntemente designado por endurecimento isotrópico. Um exemplo típico deste fenómeno corresponde a um metal sujeito a tração uniaxial. Pelo contrário, a superfície inicial pode sofrer uma contração do seu domínio, $f_1(\sigma, \mathbb{E} + d\mathbb{E})$, o que provoca uma redução da resistência do material sendo correntemente designado por amolecimento isotrópico. Um exemplo deste fenómeno corresponde a uma argila ou uma areia densa sobreconsolidada sujeita ao corte direto. Por fim, a superfície inicial pode sofrer uma translação no sentido das deformações plásticas com a mesma geometria do domínio inicial, $f_3(\sigma, \mathbb{E} + d\mathbb{E})$, neste caso é designado por endurecimento cinemático. Um exemplo deste fenómeno corresponde a um metal endurecido a frio, sujeito a tração uniaxial seguido de compressão uniaxial (efeito de *Bauschinger*). Os critérios f_2 e f_3 podem ocorrer simultaneamente dando origem, neste caso, ao chamado endurecimento misto [76].

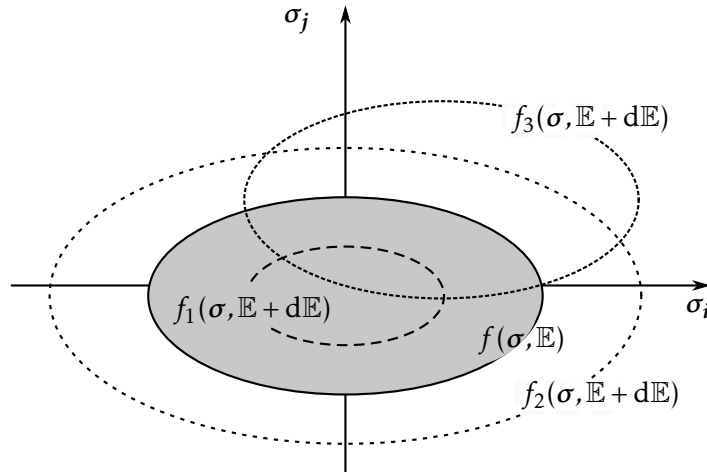


Figura 2.2: Tipos de evolução da superfície de cedência

Para além destes fenómenos, a superfície de cedência do material, $f(\sigma, \mathbb{E})$, pode também manter-se inalterada durante todo o processo de carregamento o que provoca que a resistência do material não sofra qualquer alteração, sendo este comportamento correntemente designado por perfeitamente plástico. Este tipo de comportamento, permite modelar adequadamente estruturas com elevada ductilidade, devido à grande capacidade de deformação após a ocorrência da cedência.

O comportamento perfeitamente plástico pode ser dividido em comportamento elástico perfeitamente plástico e comportamento rígido perfeitamente plástico. O colapso de um material com comportamento elástico perfeitamente plástico não depende das suas propriedades elásticas, sendo definido apenas pelas suas propriedades plásticas[78]. Assim, considerou-se que, no presente trabalho, o material exhibe um comportamento rígido perfeitamente plástico. O colapso para este tipo de comportamento é puramente plástico. Logo, no comportamento rígido perfeitamente plástico, a condição de cedência

(2.6) pode-se simplificar em:

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (2.7)$$

definindo assim uma função escalar do tensor das tensões.

O tensor das tensões, σ , pode ser decomposto em duas parcelas. Uma chamada de componente isotrópica (esférica) das tensões também chamada de tensão média, σ_m , e numa parcela designada por parcela deviatórica das tensões, q :

$$\sigma = q + \sigma_m \mathbf{I} = q + \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} \mathbf{I} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{I} corresponde à matriz identidade.

Atendendo ao comportamento isotrópico do material (secção 2.3.1), a função de cedência tem de verificar pelo menos um dos pressupostos do teorema de representação [159], $f(\mathbb{S}, \mathbb{I}, \mathbb{J})$:

ℒ. Simetria em relação às componentes principais do tensor das tensões ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$);

ℐ. Dependência dos invariantes fundamentais do tensor das tensões, em particular do invariante linear (I_1):

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (2.9)$$

ℐ. Dependência dos invariantes fundamentais da parcela deviatórica das tensões, q , nomeadamente do 2º invariante (J_2) e 3º invariante (J_3):

$$\begin{aligned} J_2 &= |q_x q_y + q_y q_z + q_x q_z - q_{xy}^2 - q_{yz}^2 - q_{xz}^2| = |q_I q_{II} + q_{II} q_{III} + q_I q_{III}| \\ J_3 &= \det(q) = q_I q_{II} q_{III} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde q_I, q_{II}, q_{III} correspondem às componentes principais da parcela deviatórica do tensor das tensões.

Tabela 2.1: Expressão dos critérios de cedência

Critério	Pressupostos	$f(\sigma)$	Legenda
Tresca	ℒ	$\sigma_I - \sigma_{III} - 2c$	c - Coesão do material
Tresca truncado em tração	ℒ	$\max(\sigma_I - \sigma_{III} - 2c, \sigma_I - \sigma_T)$	σ_T - Máxima tensão de tração
von Mises	ℒ, ℐ	$-k_y + \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]}$	k_y - Tensão de corte de cedência num ensaio de corte puro
Mohr-Coulomb	ℒ	$\sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2c \cos \phi$	ϕ - Ângulo de atrito interno do material
Drucker-Prager	ℒ, ℐ, ℐ	$-K_y(\phi, I_1) + \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]}$	$K_y(\phi, I_1) = \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{3 + \sin^2 \phi}} \left(\frac{c}{\tan \phi} - \frac{I_1}{3} \right)$

As funções de cedência mais correntes utilizadas, são o critério de Tresca (incluindo o caso truncado em tração), o critério de von Mises, o critério de Mohr-Coulomb e o critério de Drucker-Prager. As expressões destes critérios encontram-se na tabela 2.1.

Estas funções seguem a definição apresentada por Salençon [131], sendo definidas no espaço das tensões principais ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$) pressupondo a seguinte ordenação:

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad (2.11)$$

A ilustração destes critérios, não considerando a ordenação (2.11), é feita nas figuras 2.3-2.7, sendo definidas para cada critério a sua representação tanto no plano π como num plano perpendicular. O plano π é definido como um plano perpendicular à diagonal espacial ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$) num ponto arbitrário [28]. Escolheu-se este plano atendendo a que os critérios apresentados são sempre definidos pela soma da parcela isotrópica com a parcela deviatórica das tensões, como se expressa na equação (2.8).

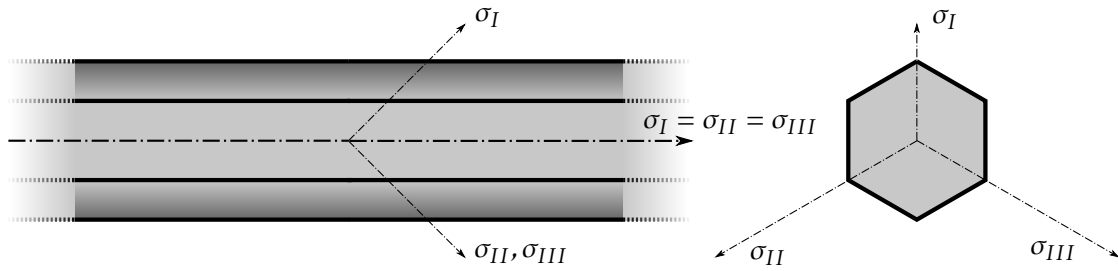


Figura 2.3: Critério de Tresca em planos perpendicular e paralelo ao plano π

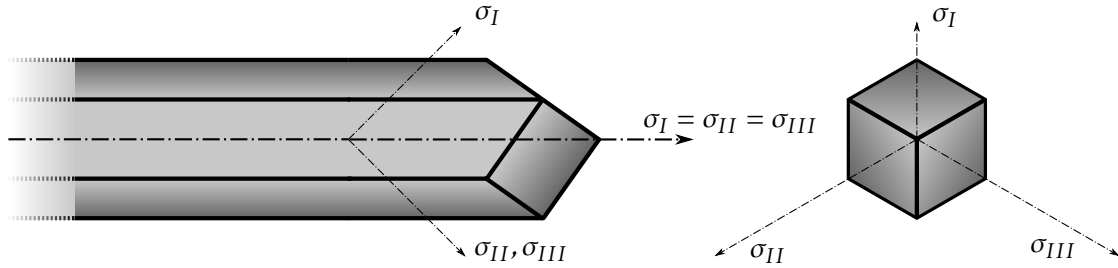


Figura 2.4: Critério de Tresca truncado em tração em planos perpendicular e paralelo ao plano π

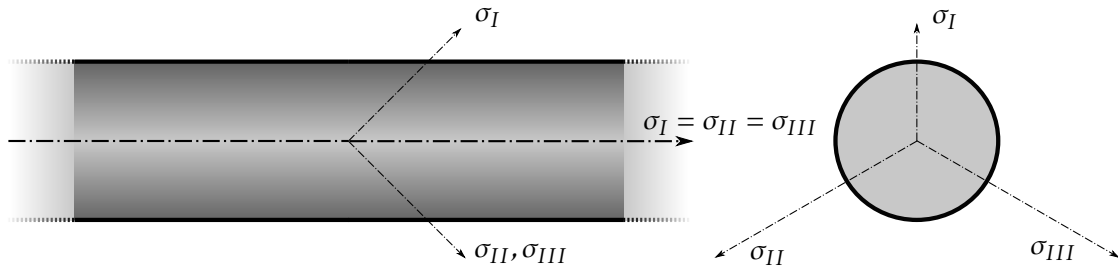
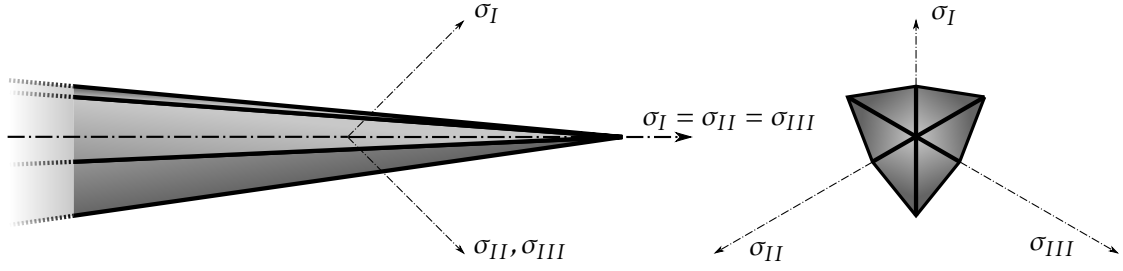
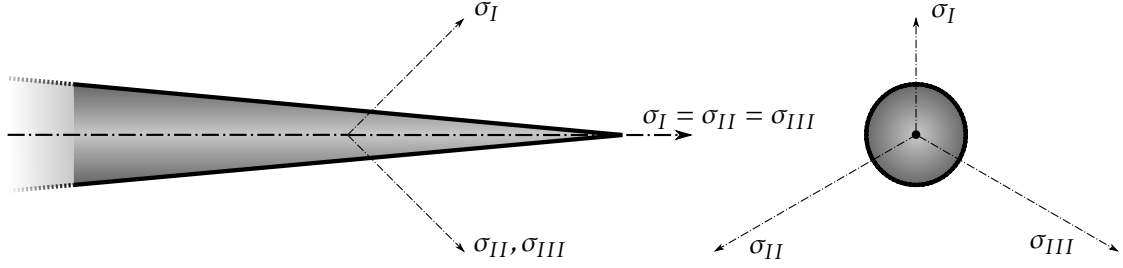


Figura 2.5: Critério de von Mises em planos perpendicular e paralelo ao plano π

2.5 Escoamento Plástico

Como se considera para o material um comportamento perfeitamente plástico (secção 2.4), após o material atingir a cedência sabe-se que as tensões se localizam sobre a superfície


 Figura 2.6: Critério de Mohr-Coulomb em planos perpendicular e paralelo ao plano π

 Figura 2.7: Critério de Drucker-Prager em planos perpendicular e paralelo ao plano π

de cedência e as deformações plásticas originadas por estes estados de tensão podem ser ilimitadas e por conseguinte desconhecidas. Assim torna-se útil definir uma nova grandeza, a taxa de deformação plástica, $\dot{\epsilon}^p$. Esta variável pode ser expressa em função do potencial plástico, $\Phi(\sigma)$:

$$\dot{\epsilon}^p = \psi \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad \psi \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.12)$$

Esta expressão permite definir algumas propriedades do vetor da taxa das deformações plásticas. Em primeiro lugar, o diferencial indica que a direção deste vetor é normal à superfície definida pelo potencial plástico e em segundo lugar, que a restrição à grandeza ψ indica que apenas se deve considerar os vetores com o sentido exterior à superfície definida pelo potencial plástico. Assim a grandeza ψ define a magnitude do tensor da taxa das deformações plásticas.

2.6 Postulado de Estabilidade de Drucker

A estabilidade do material considerado é regida pelo postulado de estabilidade de Drucker [38]. Este postulado permite relacionar dois pares distintos $(\sigma, \dot{\epsilon}^p)$ e $(\sigma_*, \dot{\epsilon}_*^p)$, definidos tanto pelo estado de tensão que verifique a função de cedência, equação (2.7), como pela respetiva taxa de deformação plástica, equação (2.12):

$$(\sigma - \sigma_*)^T (\dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}_*^p) \geq 0 \quad (2.13)$$

Um caso particular deste postulado corresponde ao denominado Princípio do Trabalho Plástico Máximo (PTPM) [77], obtido através da seguinte expressão,

$$(\sigma - \sigma_*)^T \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (2.14)$$

onde se considera que o par $(\sigma_*, \dot{\epsilon}_*^p)$ se encontra em regime elástico ($\dot{\epsilon}_*^p = \mathbf{0}$).

Da aplicação do PTPM, equação (2.14), podem ser retiradas algumas consequências relevantes:

1. A taxa de deformação plástica, $\dot{\epsilon}^p$, é apresentada como um vetor normal e exterior à superfície de cedência (ver figura 2.8);

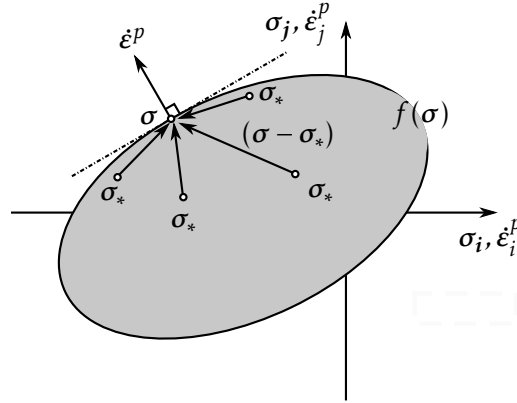


Figura 2.8: Normalidade da taxa de deformação plástica

2. A superfície de cedência, $f(\sigma)$, apresenta um domínio convexo, como ilustrado na figura 2.8. No caso da figura 2.9, a superfície de cedência apresenta um domínio não convexo dado que a equação (2.14) é violada em todos os pontos σ_* localizados à esquerda da reta paralela à superfície de cedência no ponto σ (reta a traço ponto);

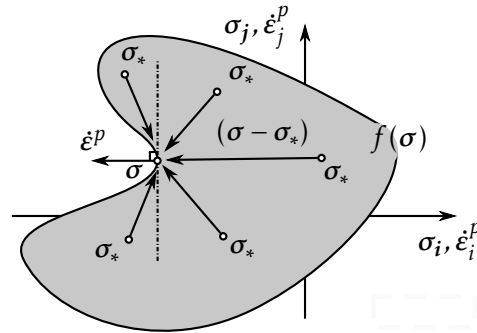


Figura 2.9: Convexidade da superfície de cedência

3. Os pontos singulares, caracterizados por derivadas descontínuas, apresentam uma deformação plástica que pode assumir qualquer direção contida no cone formado pelas normais exteriores na vizinhança deste ponto, ilustrado na figura 2.10. Este pressuposto não é mais do que a generalização da condição de normalidade, equação (2.12), expressa matematicamente através do conceito de subgradiente,

$$\dot{\epsilon}^p = \psi \partial \Phi(\sigma), \quad \psi \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.15)$$

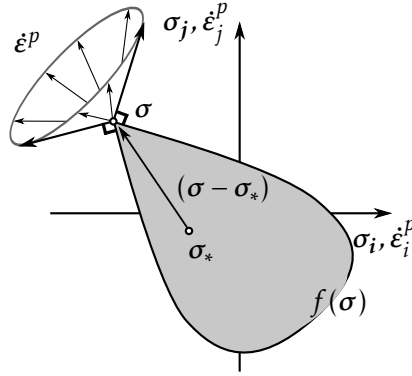


Figura 2.10: Pontos singulares

4. A dissipação plástica por unidade de volume, \mathcal{D} , obtida genericamente através da seguinte expressão,

$$\mathcal{D}(\sigma, \dot{\epsilon}^p) = \max \left((\sigma - \sigma_*)^T \dot{\epsilon}^p \right) = \max \left(\sigma^T \dot{\epsilon}^p - \sigma_*^T \dot{\epsilon}^p \right) = \sigma^T \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (2.16)$$

que corresponde ao máximo da expressão (2.14). A expressão da dissipação plástica pode ser definida apenas em função da taxa de deformação plástica, $\mathcal{D}(\dot{\epsilon}^p)$, desde que se conheça a expressão da função de cedência;

5. A função do potencial plástico nos pontos regulares, equação (2.12), e nos pontos singulares, equação (2.15), corresponde a uma translação da função de cedência,

$$\Phi(\sigma) = f(\sigma) + \text{constante} \quad (2.17)$$

definindo-se assim como uma lei de escoamento associado [77, 131]. Quando a equação (2.17) não se verifica estamos perante uma lei de escoamento não associado. Para este caso, é necessário utilizar os Teoremas de Radenkovic [121, 122] que sofreram posteriormente algumas modificações por diversos autores [77]. Este teoremas afirmam, basicamente, que o domínio do critério de cedência que obedece à regra de escoamento não associado é convexo e está contido totalmente no domínio do mesmo critério de cedência obedecendo neste caso a um regra de escoamento associado. Para solos respondendo em condições não drenadas onde as deformações se dão a volume constante, a hipótese de escoamento associado tem pouca influência no resultado. Por outro lado, para solos respondendo em condições drenadas, caracterizados por um ângulo de atrito elevado e onde as deformações não se dão a volume constante, a hipótese de escoamento associado sobre-estima a dilatação durante o corte principalmente para o caso de problemas que se encontram muito restringidos. No entanto, este não é o caso da maioria dos problemas geotécnicos, que apresentam fronteiras semi-infinitas [35]. Para este casos, Davis [27] propôs uma expressão, para modelar o escoamento não associado num solo respondendo em condições drenadas, definida através dos seus parâmetros “reduzidos” de resistência.

Estas consequências são facilmente constatadas mediante a interpretação da restrição imposta ao produto (tensorial) entre dois tensores, expressa na equação (2.14):

$$(\sigma - \sigma_*)^T \dot{\epsilon}^P = \|\sigma - \sigma_*\| \|\dot{\epsilon}^P\| \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0^\circ, 90^\circ] \quad (2.18)$$

onde θ corresponde ao menor ângulo formado entre o tensor de variação do campo das tensões e a taxa de deformação plástica, $\dot{\epsilon}^P$.

A equação (2.18) impõe basicamente que o tensor de variação da tensão, $(\sigma - \sigma_*)$, se deve encontrar localizado interiormente ao plano perpendicular à taxa de deformação plástica.

2.7 Funções de Dissipação

A dissipação plástica por unidade de volume, $\mathcal{D}(\dot{\epsilon}^P)$, definida na secção 2.6, pode ser particularizada para os critérios de cedência apresentados na tabela 2.1. Assim, na tabela 2.2 apresentam-se as funções de dissipação plástica para o critério de Tresca (incluindo o caso truncado em tração), para o critério de von Mises, para o critério de Mohr-Coulomb e para o critério de Drucker-Prager. Estas funções seguem a definição apresentada por Salençon [131], sendo definidas no espaço das taxas de deformação principais $(\dot{\epsilon}_I, \dot{\epsilon}_{II}, \dot{\epsilon}_{III})$ pressupondo a seguinte ordenação:

$$\dot{\epsilon}_I \geq \dot{\epsilon}_{II} \geq \dot{\epsilon}_{III} \quad (2.19)$$

Para além disso, define-se também na tabela 2.2, a restrição que se tem que impor, ao tensor das taxas de deformação plástica, de forma a obedecer ao escoamento plástico associado [130], equações (2.12) e (2.17), restringindo assim este campo ao denominado espaço auxiliar \mathcal{C}_c , definido de forma a garantir as restrições impostas ao escoamento.

Tabela 2.2: Definição das funções de dissipação e do espaço auxiliar

Critério	$\mathcal{D}(\dot{\epsilon}^P)$	$\dot{\epsilon}^P \in \mathcal{C}_c$	Legenda
Tresca	$c \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P)$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) = 0$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) = \dot{\epsilon}_I^P + \dot{\epsilon}_{II}^P + \dot{\epsilon}_{III}^P $
Tresca truncado em tração	$c \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) + (\sigma_T - c) \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P)$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) \geq 0$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) = \dot{\epsilon}_I^P + \dot{\epsilon}_{II}^P + \dot{\epsilon}_{III}^P$
von Mises	$k_y \sqrt{2 \operatorname{tr}((\dot{\epsilon}^P)^2)}$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) = 0$	$\operatorname{tr}((\dot{\epsilon}^P)^2) = (\dot{\epsilon}_I^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{II}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{III}^P)^2$
Mohr-Coulomb	$\frac{c}{\tan \phi} \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P)$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) \geq \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) \sin \phi$	
Drucker-Prager	$\frac{c}{\tan \phi} \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P)$	$\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}^P) \geq \sqrt{\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} (3 \operatorname{tr}((\dot{\epsilon}^P)^2) - \operatorname{tr}^2(\dot{\epsilon}^P))}$	$\operatorname{tr}^2(\dot{\epsilon}^P) = (\dot{\epsilon}_I^P + \dot{\epsilon}_{II}^P + \dot{\epsilon}_{III}^P)^2$

2.8 Carregamentos

Considera-se que o corpo analisado, definido na secção 2.2, se encontra sujeito a forças de massa, \mathbf{b} , aplicadas no seu domínio, Ω , e a forças de superfície externas, \mathbf{t} , aplicadas na fronteira de Neumann, Γ_σ como se ilustra na figura 2.1.

Pressupõe-se que a aplicação destes carregamentos se procede de uma forma quase estática, permitindo desprezar quaisquer efeitos de inércia. Este facto leva a que se despreze qualquer efeito da aceleração no cálculo das forças aplicadas.

A relação entre os carregamentos pode ser representada num espaço, designado por espaço dos carregamentos. Como se demonstra na figura 2.11, este espaço pode ser dividido em três zonas: carregamentos admissíveis, carregamentos inadmissíveis e carregamentos limite (zona que separa as duas primeiras). Nesta figura ilustram-se alguns conceitos apresentados por Salençon [131]. Em primeiro lugar, o domínio formado pelos carregamentos admissíveis é convexo, pois apresenta as mesmas propriedades que a superfície de cedência. E, em segundo lugar, a carga de colapso obtida não é afetada pela trajetória de carregamento.

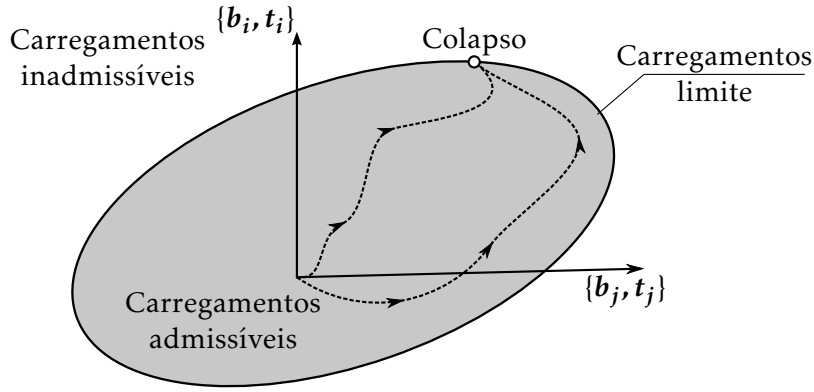


Figura 2.11: Domínio dos carregamentos admissíveis

O pressuposto de linearidade geométrica origina que a geometria do corpo não sofra grandes modificações permitindo que as equações de equilíbrio no domínio do corpo sejam expressas por:

$$D\sigma + b = 0 \quad (2.20)$$

onde D corresponde ao operador de equilíbrio diferencial,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Permite também que as equações de equilíbrio na fronteira de Neumann do corpo sejam expressas por:

$$N\sigma = t \quad (2.22)$$

onde a matriz N corresponde ao operador de equilíbrio nas fronteiras definida pelas componentes do versor normal exterior à fronteira. Assim as equações de equilíbrio são formuladas na forma indeformada do corpo não sendo contabilizadas as alterações na sua geometria à medida que esta se deforma. Desta forma é desprezado qualquer comportamento geométrico não linear, denominado por efeitos de 2ª ordem, que afeta sobretudo as estruturas esbeltas (estruturas em que uma das dimensões é muito superior às restantes).

A consideração de linearidade geométrica provoca que se torne igualmente válida a hipótese de pequenas deformações, permitindo estabelecer a relação de compatibilidade entre o vetor de deslocamentos, \mathbf{u} , e o tensor das deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad (2.23)$$

onde \mathbf{D}^* corresponde ao operador de compatibilidade diferencial que equivale à transposta da matriz de \mathbf{D} . A equação (2.23) pode ser definida de uma forma mais conveniente:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \quad (2.24)$$

definindo-se neste caso como uma função entre a taxa de deformações, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, e o vetor das velocidades, $\dot{\mathbf{u}}$. Já existem trabalhos na literatura que tentam explorar estas simplificações, destacando-se o trabalho de Tangaramvong [144], onde se define uma formulação do Teorema Cinemático da Análise Limite que tem em consideração os efeitos de segunda ordem de não linearidade geométrica para o caso de análise de barras bi-dimensionais.

Em Chen [22], procede-se a uma comparação das curvas obtidas pela Análise Limite e pela Análise elasto-plástica incremental em pequenas e em grandes deformações para o estudo da capacidade resistente de uma sapata rígida em deformação plana sobre um solo respondendo em condições drenadas. Nesta mesma referência chega-se à conclusão que os valores obtidos pela a Análise Limite sub-estimam a carga de colapso real deste problema considerando grandes deformações, por isso, todos os valores obtidos pela Análise Limite representam estimativas pela segurança. Apesar de em alguns casos o resultado obtido não representar uma boa estimativa da carga máxima suportada pela sapata, em todos os casos a carga obtida corresponde a um indicador a partir da qual pequenos incrementos de carga originam grandes deslocamentos.

2.9 Teoremas da Análise Limite

Considerando um sistema mecânico que verifique os pressupostos indicados previamente, é garantida a validade dos três teoremas da Análise Limite [37]: Teorema Estático, Teorema Cinemático e Teorema da Unicidade (TU).

O Teorema Estático da Análise Limite, também conhecido por Teorema da Região Inferior (TRI) pode ser formulado da seguinte forma:

Se uma distribuição de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, equilibrar no domínio as forças de massa, \mathbf{b} , como expresso na equação (2.20) e na fronteira estática as forças de superfície exterior, \mathbf{t} , como expresso pela equação (2.22) e não violar a função de cedência (2.7) estamos perante uma distribuição de tensões estática e plasticamente admissível. Então estes carregamentos (\mathbf{b}, \mathbf{t}) serão interiores ao conjunto dos carregamentos que provocam o colapso da estrutura, pertencendo assim à região dos carregamentos admissíveis ou suportáveis.

Por outro lado, o Teorema Cinemático da Análise Limite, também conhecido por Teorema da Região Superior (TRS) pode ser formulado da seguinte forma:

Se um campo de deformações plásticas, taxa de deformação plástica ($\dot{\epsilon}^p$) e campo das velocidades ($\dot{\mathbf{u}}^p$) verificar a compatibilidade, tanto no domínio, expressa pela equação (2.24), como na fronteira cinemática, expressa pela equação (2.1) e respeite a regra de escoamento plástico associado, expressa pelas equações (2.12), (2.15) e (2.17), então estamos perante um campo de deformações plásticas que é cinematicamente admissível. Assim os carregamentos, definidos pelas forças de superfície exteriores, \mathbf{t} , e pelas forças de massa, \mathbf{b} , em que a potência das forças exteriores aplicadas,

$$\Pi_e(\dot{\mathbf{u}}^p) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}}^p d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}}^p d\Gamma \quad (2.25)$$

é majorante da potência plástica total dissipada,

$$\Pi_D(\dot{\epsilon}^p) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\epsilon}^p) d\Omega \quad (2.26)$$

serão exteriores ao conjunto dos carregamentos que provocam o colapso da estrutura, pertencendo assim à região dos carregamentos inadmissíveis ou não suportáveis.

Por fim, o Teorema da Unicidade da Análise Limite pode ser formulado da seguinte forma:

Se existir uma solução, cujo campo de tensões, σ , verifica os requisitos do Teorema Estático e um campo de deformações plásticas, $(\dot{\epsilon}^p, \dot{\mathbf{u}}^p)$, verifica os requisitos do Teorema Cinemático, então os carregamentos obtidos (\mathbf{b}, \mathbf{t}) serão iguais aos carregamentos que provocam o colapso da estrutura, chamados de carregamentos limite ou de colapso.

Este teorema é facilmente entendido através da figura 2.12, onde se representa a aproximação aos carregamentos limite pelo interior (Teorema Estático) e pelo exterior (Teorema Cinemático).

Pela figura 2.12, conclui-se que a carga de colapso real da estrutura apenas é atingida quando a diferença entre os dois teoremas for nula, isto é, quando os valores obtidos pelos dois teoremas forem coincidentes. Está assim verificado o enunciado pelo Teorema da Unicidade para materiais regidos por um escoamento associado. Para materiais regidos por um escoamento plástico não associado, definidos na secção 2.6, o Teorema Estático e Teorema Cinemático deixam de ser complementares, isto é, não é possível garantir a qualidade de conjunto interior e conjunto exterior dos carregamentos que provocam o colapso da estrutura, sendo assim impossível verificar o enunciado do Teorema da Unicidade.

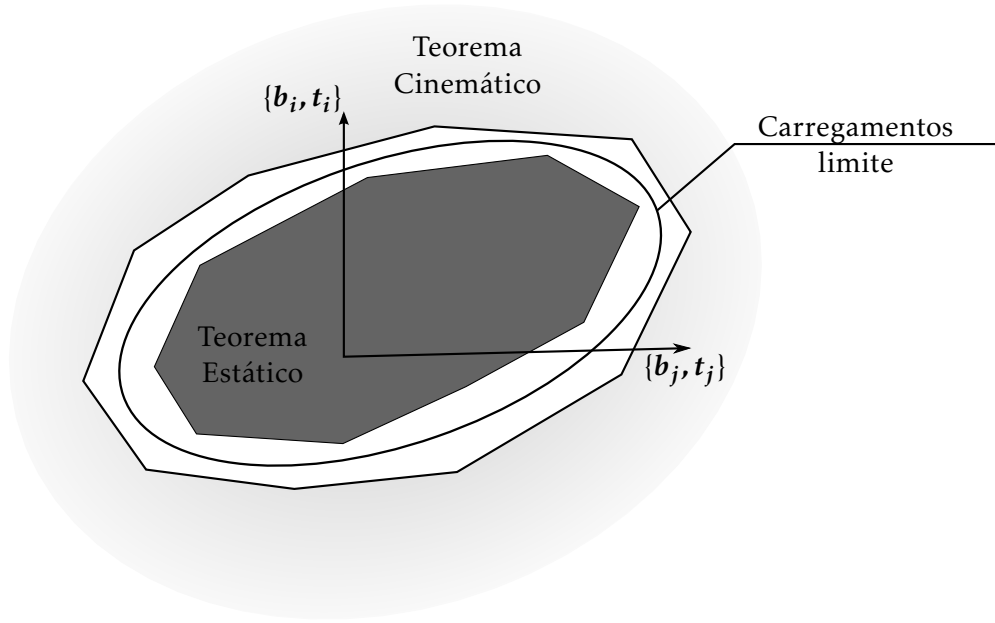


Figura 2.12: Teoremas da Análise Limite

2.9.1 Otimização Matemática

Os teoremas Estático e Cinemático podem ser expressos através de problemas matemáticos de otimização, através da forma padrão [20],

$$\min g_0(\mathbf{x}) \quad (2.27a)$$

$$\text{sujeito a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.27b)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (2.27c)$$

onde se procura o vetor \mathbf{x} que minimize a função $g_0(\mathbf{x})$ entre todos os possíveis valores de \mathbf{x} que verifiquem as condições $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ $i = 1, \dots, m$ e $h_j(\mathbf{x}) = 0$ $j = 1, \dots, p$.

A variável $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é chamada de variável de otimização e a função $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função objetivo. As desigualdades $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas de funções das restrições de desigualdade e $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas de funções das restrições de igualdade.

O domínio do problema de otimização (2.27) é definido por,

$$\mathbb{D} = \bigcap_{i=0}^m \mathbb{D}g_i + \bigcap_{j=1}^p \mathbb{D}h_j \quad (2.28)$$

que representa o conjunto de pontos para os quais a função objetivo e todas as restrições estão definidas. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ pertence à região possível se verificar as restrições (2.27b) e (2.27c).

A solução deste problema verifica-se quando se atingir o valor ótimo p^* ,

$$p^* = \inf \{g_0(\mathbf{x}) \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p\} \quad (2.29)$$

que é obtido quando a variável \mathbf{x} atinge a grandeza ótima \mathbf{x}^* .

2.9.2 Problema de otimização subjacente ao Teorema Estático

Aplicando as condições do Teorema Estático, constata-se que o carregamento (\mathbf{b}, \mathbf{t}) mais exterior ao conjunto dos carregamentos aplicados corresponde à melhor estimativa. Logo esta pesquisa resulta num problema matemático de otimização não linear (2.30).

$$\max \quad \alpha \quad (2.30a)$$

$$\text{sujeito a } f(\sigma) \leq 0 \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{D}\sigma + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (2.30c)$$

$$\mathbf{N}\sigma = \alpha\mathbf{t} + \mathbf{t}_0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.30d)$$

Por motivos de conveniência, procedeu-se à divisão dos carregamentos em dois grupos, cargas variáveis e cargas fixas. No primeiro grupo, as cargas variáveis apresentam uma magnitude que é afetada pelo multiplicador de carga α ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). No outro grupo, as cargas fixas mantêm-se inalteradas não sendo afetadas pelo tempo, isto é, não são afetadas por qualquer multiplicador de carga. Assim para diferenciar estas quantidades representam-se as cargas constantes com um subscrito “0” ($\mathbf{b}_0, \mathbf{t}_0$), enquanto que para as cargas variáveis não se apresenta qualquer subscrito (\mathbf{b}, \mathbf{t}).

Segundo a nomenclatura da forma padrão do problema matemático de otimização (2.27), percebe-se que a variável de otimização do problema corresponde ao vetor $\mathbf{x} = (\alpha, \sigma)$ que armazena, respetivamente, o multiplicador de carga e as componentes do tensor das tensões num campo estaticamente admissível. Sendo a função objetivo $g_0(\mathbf{x}) = -\alpha$ sujeita a um único conjunto de restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) = f(\sigma)$ que origina a não linearidade do problema e a dois conjuntos de restrições de igualdade $h_j(\mathbf{x}) = \{\mathbf{D}\sigma + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{b}_0 ; \mathbf{N}\sigma - \alpha\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\}$.

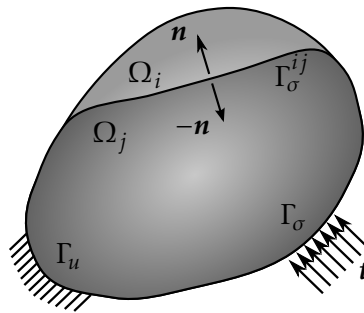


Figura 2.13: Interface entre subdomínios

Nesta última restrição de igualdade (2.30d) que se verifica nas fronteiras de Neumann, engloba-se também o equilíbrio de interface entre subdomínios, ver figura 2.13. Nesta figura, \mathbf{n} representa o vetor normal exterior à fronteira normalizado (segundo o subdomínio j). A equação (2.30d) pode ser re-escrita considerando o interface entre o subdomínio i e j da seguinte forma:

$$\mathbf{N}\sigma_i = \mathbf{N}\sigma_j \quad (2.31)$$

De referir, que os sistemas mecânicos considerados não precisam de apresentar um domínio finito como se verifica na figura 2.13. Em muitos problemas geotécnicos, pretende-se analisar domínios infinitos ou semi-infinitos, isto é, domínios que são totalmente ou parcialmente ilimitados. Nestes casos o problema expresso pela equação (2.30) impõe-se da mesma forma, mas é necessário garantir adicionalmente que no infinito se verificam as condições de igualdade e que não é violado em nenhum desses pontos a função de cêndia, para se garantir a obtenção de um limite estritamente inferior à carga de colapso real da estrutura.

2.9.3 Problema de otimização subjacente ao Teorema Cinemático

Aplicando as condições do Teorema Cinemático, constata-se que o carregamento (\mathbf{b}, \mathbf{t}) mais interior ao conjunto dos carregamentos aplicados corresponde à melhor estimativa. Logo esta pesquisa resulta num problema matemático de otimização não linear (2.32).

$$\min \quad (\Pi_0(\dot{\mathbf{u}}) + \alpha \Pi(\dot{\mathbf{u}})) - \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega \quad (2.32a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c \quad (2.32b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \quad (2.32c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.32d)$$

Por motivos de conveniência, utilizou-se o mesmo raciocínio que na secção 2.9.2, procedendo-se à divisão dos carregamentos em dois grupos, cargas variáveis e cargas fixas. Assim a potência das forças exteriores (Π_e) é dividida em potência das forças exteriores constantes (Π_0) e potência das forças variáveis (Π) .

Segundo os trabalhos de Vicente da Silva [151], o problema resultante da aplicação do Teorema Cinemático da Análise Limite equação (2.32) pode ser simplificado,

$$\min \quad \alpha (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega - \Pi_0(\dot{\mathbf{u}}) \quad (2.33a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c \quad (2.33b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \quad (2.33c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.33d)$$

$$\Pi(\dot{\mathbf{u}}) = 1 \quad (2.33e)$$

introduzindo para isso uma restrição adicional, equação (2.33e), que produz a normalização da potência das forças exteriores variáveis.

Segundo a nomenclatura da forma padrão do problema matemático de otimização, equação (2.27), a variável de otimização do problema corresponde ao vetor $\mathbf{x} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{u}})$ que armazena, respetivamente, as componentes do tensor das taxas de deformação e as componentes das velocidades num campo cinematicamente admissível. A função objetivo $g_0(\mathbf{x}) = \Pi_{\mathcal{D}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \Pi_0(\dot{\mathbf{u}})$ é sujeita a um único conjunto de restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) =$

$\{\dot{\epsilon} \in \mathcal{C}_c\}$ que origina a não linearidade do problema e a três conjuntos de restrições de igualdade $h_j(\mathbf{x}) = \{\dot{\epsilon} - \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}}; \mathbf{u}; \Pi(\dot{\mathbf{u}}) - 1\}$. A não linearidade do problema de otimização, equação (2.33), provêm ainda do cálculo da potência plástica total dissipada na função objetivo, equação (2.33a).

2.9.4 Dualidade

É possível estabelecer uma relação entre o Teorema Estático e o Teorema Cinemático da Análise Limite através da dualidade Lagrangeana. Esta relação será explorada com maior detalhe na secção 4.4, sendo agora explicado o conceito padrão de dualidade Lagrangeana.

A ideia básica na dualidade Lagrangeana é ter em conta as restrições do problema matemático de otimização na sua forma padrão (2.27) através da sua introdução na função objetivo de uma forma ponderada [15]. Assim o Lagrangeano, \mathcal{L} , associado ao problema (2.27) é obtido através da seguinte expressão:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p y_j h_j(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

onde v_i corresponde ao multiplicador de Lagrange associado à restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ e y_j corresponde ao multiplicador de Lagrange associado à restrição de igualdade $h_j(\mathbf{x}) = 0$. Os vetores (\mathbf{v}, \mathbf{y}) são chamados de variáveis duais ou de multiplicadores de Lagrange associados ao problema padrão (2.27).

Define-se então a função dual $q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ como o menor valor do Lagrangeano em função a \mathbf{x} :

$$q(\mathbf{v}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \quad (2.35)$$

Em Nocedal [111], demonstra-se que este problema permite obter estimativas inferiores ao valor ótimo p^* , obtido através da equação (2.29). Assim para qualquer $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ e \mathbf{y} temos que:

$$q(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \leq p^* \quad (2.36)$$

onde o símbolo curvo de desigualdade “ \geq ” em $(\mathbf{v} \geq \mathbf{0})$, representa a desigualdade de cada componente entre dois vetores. Logo o melhor valor que se consegue obter da função dual, resulta no seguinte problema de otimização:

$$\max \quad q(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \quad (2.37a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (2.37b)$$

chamado de problema dual. Neste contexto, o problema original, equação (2.27), é por vezes designado por problema primal. Sendo a função primal, g_0 , corresponde ao maior valor do Lagrangeano em função das variáveis duais,

$$g_0(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{v}, \mathbf{y}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \quad (2.38)$$

A solução do problema de otimização dual (2.37) verifica-se quando se atinge o valor ótimo d^* que é obtido quando as variáveis duais (\mathbf{v}, \mathbf{y}) atingirem as grandezas ótimas $(\mathbf{v}^*, \mathbf{y}^*)$ chamadas de multiplicadores de Lagrange ótimos. Assim d^* corresponde à melhor estimativa inferior de p^* que se pode obter do problema dual,

$$d^* = \max_{\mathbf{v}, \mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{v}, \mathbf{y}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = p^* \quad (2.39)$$

facilmente obtido através das equações (2.27) e (2.35-2.38). Esta propriedade é chamada de dualidade frágil e verifica-se sempre, mesmo que o problema original não seja convexo [51]. Se a igualdade da equação (2.39) se verificar estamos perante a chamada dualidade robusta. Para estarmos perante esta condição é necessário que o problema original seja convexo e que cumpra os requisitos da Condição de Slater [137]. Esta condição indica que se existe um ponto \mathbf{x} que pertence ao interior de \mathbb{D} e que verifique a equação:

$$g_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \quad (2.40)$$

então este ponto é chamado de estritamente viável, dado que a restrição de desigualdade se verifica de uma forma exata. A condição de Slater, equação (2.40), pode ser relaxada para o caso de alguma das restrições de desigualdade serem funções afins, isto é, funções em que qualquer reta formada por dois pontos do seu domínio pertence também totalmente a este domínio. Assim, se as primeiras k restrições de desigualdade forem afins, a dualidade robusta verifica-se se existir um ponto \mathbf{x} que pertença ao interior de \mathbb{D} e que verifique neste caso:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = k + 1, \dots, m, \quad h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \quad (2.41)$$

Qualquer problema de otimização em que se verifique a dualidade robusta e em que as funções g_i sejam convexas e h_j sejam funções afins, então, se \mathbf{x}^* e $(\mathbf{v}^*, \mathbf{y}^*)$ forem pontos ótimos primais e duais, verificam-se as seguintes condições,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{y}^*) = \nabla_{\mathbf{x}} g_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m v_i^* \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p y_j^* \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (2.42a)$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42b)$$

$$h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.42c)$$

$$v_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42d)$$

$$v_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42e)$$

chamadas de condições *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT). Estas condições foram originalmente propostas por Kuhn e Tucker [70], contudo posteriormente veio-se a descobrir que estas condições já tinham sido apresentadas por Karush na sua tese de mestrado [63].

As condições KKT (2.42) impõem, em primeiro lugar a condição de estacionaridade em ordem à variável primal, equação (2.42a), enquanto que a segunda equação (2.42b) e terceira equação (2.42c) impõem as restrições do problema primal. A quarta restrição,

equação (2.42d), impõe a condição de desigualdade do problema dual. Sendo a última restrição, equação (2.42e), a imposição da condição de folga complementar.

Como referido no início desta secção, estes conceitos de dualidade Lagrangeana serão utilizados posteriormente para estabelecer uma relação entre o Teorema Estático e Cinemático da Análise Limite.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

3.1 Introdução

O estudo do colapso das estruturas, em oposição ao estudo do comportamento em serviço, fornecido normalmente pela teoria da elasticidade, teve sempre o interesse da comunidade científica. Um dos primeiros exemplos em que foi analisado o comportamento plástico, corresponde ao estudo de uma viga em consola por Galileo [75] no século XVII, onde se estimou o momento de colapso na zona de encastramento. No século seguinte procedeu-se ao estudo da estabilidade de muros de suporte de terras por Coulomb [26], que estimou a força mínima que uma estrutura de suporte tem de aplicar no terreno para evitar o deslizamento do solo ao longo de um plano de rotura.

Desde esses primórdios, a teoria da plasticidade sofreu inúmeros progressos, onde se destaca a definição de vários critérios de cedência através dos trabalhos de Tresca [147], Mohr-Coulomb [101], von Mises [100] e de Drucker-Prager [36], bem como a descrição dos princípios do escoamento plástico definidos nos trabalhos de Saint-Venant [129] e Lévy [72] e sendo generalizados por Reuss [124]. De igual modo refere-se as equações de equilíbrio e de compatibilidade desenvolvidas através dos trabalhos de Saint-Venant [128] que originalmente foram definidas para a teoria da elasticidade.

Em meados do século XX ocorreu o estabelecimento dos Teoremas Estático e Cinemático da Análise limite através dos trabalhos de Drucker, Greenberg e Prager [38]. Contudo estes teoremas já tinham sido definidos implicitamente nos trabalhos de Gvozdev [54] e de Hill [57].

Passados cerca de vinte anos, Lysmer [85] desenvolve o primeiro modelo discretizado de elementos finitos associado à Análise Limite, que permite estimar a carga de colapso de estruturas através de técnicas de otimização matemática. Com este trabalho o Método dos Elementos Finitos (MEF) associado à programação matemática começou a tornar-se a principal metodologia utilizada na resolução dos problemas derivados da aplicação dos Teoremas da Análise Limite. Só a partir dos anos 90 é que esta metodologia superou a supremacia dos mecanismos analíticos. Desde estes trabalhos pioneiros surgiram diversas formulações de elementos finitos para a Análise Limite.

De seguida apresenta-se, para o Teorema Estático e Cinemático da Análise Limite, uma breve revisão bibliográfica das formulações mais relevantes que surgiram nas últimas décadas. Para uma melhor compreensão das formulações propostas, dividiram-se as mesmas em formulações fortes e formulações fracas. Assim, segundo esta nomenclatura, as formulações fortes correspondem a formulações em que o modelo proposto respeita estritamente as condições impostas pelos Teoremas Estático ou Cinemático, permitindo deste modo a obtenção de um minorante ou majorante verdadeiro da carga de colapso real da estrutura. Pelo contrário, as formulações fracas correspondem a formulações em que o modelo proposto relaxa as condições impostas pelos Teoremas Estático ou Cinemático, não se garantindo assim que a estimativa obtida corresponde a um minorante ou majorante da carga de colapso real da estrutura.

Pode-se então constatar que as formulações fracas surgiram para fazer face ao elevado esforço computacional exigido pelas formulações fortes. No início do século XXI, com os trabalhos de Christiansen e Pedersen [23], surge uma nova corrente de investigação que permite reduzir o custo computacional significativo das formulações fortes através da utilização de técnicas de adaptabilidade. Esta técnica consiste basicamente em estabelecer um critério que permite definir as zonas críticas onde se irá proceder ao refinamento da malha.

Por fim, neste capítulo apresenta-se também uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos publicados sobre a técnica de adaptabilidade.

3.2 Teorema Estático da Análise Limite

Os trabalhos de Lysmer [85] foram os primeiros em que se associou elementos finitos com técnicas de otimização matemática. A formulação proposta permitia resolver problemas geotécnicos (determinação de impulsos passivos de terras e capacidade resistente de fundações superficiais) em deformação plana através da sua discretização em elementos triangulares de 3 nós. Como se considera que a tensão varia linearmente em cada elemento, é suficiente definir as tensões nos nós do elemento. Assim escolhem-se como variáveis a tensão normal interna em cada elemento e a tensão normal e de corte por cada nó de cada aresta.

O critério de rotura adotado corresponde a uma linearização do critério de Mohr-Coulomb através de um polígono inscrito de n lados, que converte a inequação de segundo grau original num conjunto de inequações lineares, resultando assim num problema linear de otimização devido à função objetivo e às restrições serem definidas como combinações lineares das tensões. Este problema é resolvido através do método Simplex [46].

Este algoritmo é considerado como uma formulação de limite inferior fraca dado que não se consegue afirmar que o campo de tensões obtido seja estaticamente admissível em todo o domínio semi-infinito dos problemas analisados, atendendo a que não existe uma estratégia para estender o campo de tensões para além da região limitada pelas fronteiras da malha de elementos finitos.

Nessa altura, a maior desvantagem deste método residia na sua ineficiência computacional, devido não só ao reduzido número de elementos que podiam definir uma malha (cerca de vinte) como devido ao elevado tempo de cálculo necessário para se obter bons resultados (o tempo de cálculo é no mínimo uma potência de base três em ordem a n), apesar da convergência da solução ser atingida para um número reduzido de iterações.

Seguindo os trabalhos pioneiros de Lysmer, utilizando igualmente elementos triangulares de 3 nós na sua discretização, Anderheggen e Knöpfel [5] propuseram uma formulação que permitia resolver problemas de placas bidimensionais. Para simplificar o problema consideraram que as tensões são expressas no sistema cartesiano; assim um elemento é caracterizado por uma tensão constante ou linear consoante se defina as variáveis apenas no elemento ou nas arestas de cada elemento.

Esta formulação recorre igualmente à linearização do critério de rotura, resultando assim como se viu anteriormente num problema linear de otimização, resolvido neste caso através do algoritmo Simplex modificado. Este algoritmo necessita de uma menor capacidade de armazenamento e possui uma maior eficiência computacional. Este método é então considerado como uma formulação de limite inferior forte ou fraca consoante se considere o elemento triangular com tensão constante ou linear, dado que no último caso não se garante que a equação de equilíbrio seja verificada em todo o domínio do corpo.

Posteriormente, em Pastor [115] e pelo grupo de Bottero [19] propuseram uma formulação baseada nos elementos triangulares de três nós com uma distribuição linear de tensões [5], aplicados neste caso a problemas geotécnicos (capacidade resistente de fundações superficiais e estabilidade de taludes) em deformação plana. Esta formulação é capaz de lidar com o critério de rotura de Mohr-Coulomb e de Tresca garantindo neste caso o equilíbrio em todo o domínio do corpo.

Mas o mais importante destes trabalhos corresponde à formulação de duas técnicas que permitem estimar soluções num meio semi-infinito. A primeira técnica consiste em definir elementos de extensão que permitam impor as condições de extensão definindo neste caso uma formulação de limite inferior forte. A segunda técnica consiste em aumentar o domínio finito até que a variação da solução seja pouco significativa. Esta última técnica implica uma formulação de limite inferior fraca, dado não ser possível garantir que a função de cedência seja verificada em todo o domínio semi-infinito.

A técnica de programação linear é então generalizada por Pastor e Turgeman [114] para resolver problemas de estruturas axissimétricas, isto é, estruturas que podem ser representadas por uma secção transversal que contém um eixo de revolução.

As formulações apresentadas até à década de 60 eram caracterizadas pela sua ineficiência computacional causadas pela incapacidade dos algoritmos existentes para lidar com restrições muito esparsas e anti-simétricas. Apesar dos esforços desenvolvidos por Sloan [138] para fazer face a estas limitações, persistia a incapacidade de resolver problemas bidimensionais de grandes dimensões e problemas tridimensionais ambos caracterizados pelo elevado número de equações resultantes da linearização dos critérios de rotura adotados.

Este facto motivou a criação de algoritmos de programação não linear que permitem avaliar a função de cedência na sua forma original. O primeiro caso de aplicação desta técnica remonta aos trabalhos de Hodge e Belytschko em 1968 [59], onde analisou placas quadradas e retangulares bidimensionais assumindo um comportamento modelado pelo critério de cedência de von Mises. Os problemas analisados são discretizados em elementos finitos que adotam uma distribuição quadrática de momentos, sendo definidos por uma função polinomial geral de quarta ordem de Airy que automaticamente satisfaz o equilíbrio em cada elemento. O problema não linear resultante é resolvido através da técnica de Minimização Sequencial sem restrições, desenvolvida pelo grupo de trabalho [96]. Este método é considerado como uma formulação do limite inferior forte dado que se verifica a restrição da função de cedência nos máximos relativos em cada iteração do algoritmo. Como se compreende a determinação destes máximos corresponde nessa altura a um elevado esforço computacional, contribuindo para a sua ineficácia para problemas de maiores dimensões.

Em 1970, o mesmo grupo de trabalho [14] estendeu esta formulação para resolver problemas de tensão plana através de elementos finitos triangulares que adotam uma distribuição quadrática do campo das tensões.

As técnicas de resolução dos problemas não lineares resultantes da aplicação do Teorema Estático da Análise Limite foram alvo de estudo por diversos grupos de trabalho mas só com os trabalhos de Lyamin e Sloan em 1997 [84] se conseguiu melhorar drasticamente a eficiência computacional destas técnicas.

Lyamin e Sloan [84] propõem uma nova formulação forte em que se discretiza o problema através de elementos triangulares/tetraedros definidos por uma distribuição linear de tensões. A solução do problema resulta da resolução direta do sistema não linear resultante da aplicação das condições *Karush-Kuhn-Tucker*, através de uma variante do algoritmo proposto pelo grupo liderado por Zouain [167]. Este algoritmo consiste num método de ponto interior resolvido através do método de quase-Newton com deflexão de duas etapas. A técnica proposta [78, 79] apenas permite resolver critérios de cedência convexos e que sejam diferenciáveis. Quando as funções de cedência apresentarem pontos de singularidade (pontos com gradiente indefinido) considera-se uma suavização local nos vértices da função de cedência [1].

O método apresenta uma formulação eficiente para resolver aplicações tridimensionais caracterizadas por um número elevado de variáveis. Esta eficiência está ligado ao facto do número de iterações necessárias para se atingir a convergência da solução ser independente do grau de refinamento. Contudo o custo temporal despendido em cada iteração aumenta com o grau de refinamento da malha de elementos finitos.

Seguindo os trabalhos de Lyamin e Sloan [84], surgem duas formulações que não necessitam que as funções de cedência sejam diferenciáveis em todo o seu domínio. A primeira corresponde à programação cónica de segunda ordem proposta por diversos autores [25, 87, 68], que permite resolver de uma forma robusta e eficiente uma grande variedade de problemas bidimensionais e tridimensionais. Contudo é incapaz de resolver

problemas modelados pelos critério de cedência tridimensionais de Mohr-Coulomb e de Tresca. Para ultrapassar esta limitação surge a segunda formulação designada por programação semi-definida positiva proposta por Krabbenhøft [69].

Apesar disso, estas duas formulações fortes apresentam a incapacidade de lidar com critérios de cedência que não se consigam expressar em restrições cónicas de segunda ordem ou semi-definidas positivas.

3.3 Teorema Cinemático da Análise Limite

A resolução do problema de otimização resultante da aplicação do Teorema Cinemático da Análise Limite através de elementos finitos foi executada primeiramente por Maier [86] e Anderheggen [5]. Ambas as formulações seguem os mesmos princípios, que já foram descritos no início da secção 3.2 (programação linear). Contudo acrescenta-se que ambos os elementos estudados apresentam uma distribuição linear do campo dos deslocamentos (deformação constante). Assim cada elemento é definido pelas componentes dos deslocamentos em cada nó. Este método é considerado como uma formulação de limite superior forte e fraca consoante se considere o elemento triangular com tensão constante ou linear, dado que no último caso a equação de compatibilidade pode ser violada localmente.

Posteriormente, Bottero [19] generalizou o método anteriormente apresentado para resolver problemas geotécnicos em deformação plana. Esta formulação é baseada em elementos triangulares de três nós com uma distribuição constante de deformações e com uma distribuição linear do campo das velocidades. Em cada elemento, o vetor das velocidades é definido pela duas componentes cartesianas, onde a existência de descontinuidades no campo das velocidades entre elementos se considera cinematicamente admissível. Os critérios de rotura adotados correspondem à linearização dos critérios de Mohr-Coulomb e de Tresca, através de um polígono circunscrito de n lados. Como neste método a equação de compatibilidade é verificada em todo o domínio do corpo trata-se de uma formulação de limite superior forte.

Esta formulação é então generalizada por Turgeman e Pastor [149] para resolver problemas de estruturas axissimétricas, nomeadamente o problema do teste triaxial e a análise da estabilidade de escavações circulares para solos definidos pelos critérios de cedência de von Mises ou de Tresca. Contudo, trata-se de uma formulação fraca dado que a condição de plasticidade apenas é verificada em média, isto é, apenas se verifica esta condição no centroide dos elementos triangulares que são definidos através das suas propriedades cilíndricas.

Yu [160] define uma nova formulação forte da região superior, discretizando o problema através de elementos triangulares de seis nós. Estes elementos são caracterizados por uma distribuição linear do campo das deformações sendo definidos pelas duas componentes das velocidades em cada nó e pelas taxas dos multiplicadores plásticos nos nós de vértice. Ao contrário dos elementos triangulares de três nós, não necessitam de se dispor de forma especial, isto é, não necessitam de formar um quadrilátero por cada

quatro triângulos onde o nó central se localiza na interseção das diagonais (centroide), para o número de graus de liberdade ser maior que as restrições impostas pela condição de incompressibilidade volumétrica em materiais puramente coesivos (Tresca e von Mises) [108]. Os elementos triangulares de seis nós permitem modelar a velocidade com mais precisão com um menor número de elementos. Consentem também a existência de descontinuidades entre elementos adjacentes permitindo a existência de descontinuidades das componentes normal e tangencial do vetor das velocidades. Esta formulação é avaliada através do problema da determinação da capacidade resistente de fundações superficiais em deformação plana, sendo os problemas lineares resultantes resolvidos através do esquema de conjunto ativo mais íngreme de aresta proposto por Sloan [139].

Apesar das diversas formulações desenvolvidas mantinha-se a necessidade de especificar a priori a localização e a direção de corte de cada descontinuidade. Este facto impossibilitava a utilização de um número elevado de descontinuidades orientados de uma forma aleatória que poderiam originar uma melhoria significativa na solução do problema. Esta melhoria apenas foi alcançada com a formulação proposta por Sloan e Kleeman [141]. Esta formulação forte do limite superior foi baseada no trabalho anterior [139], permitindo assim a introdução de descontinuidades entre qualquer aresta partilhada por dois elementos fazendo a direção do corte parte do processo de otimização. Para modelar a descontinuidade ao longo do comprimento, definiu-se um elemento quadrilátero com espessura nula definido pela velocidade tangencial em cada um dos quatro nós deste elemento. Os problemas analisados (capacidade resistente de fundações drenadas e não drenadas em deformação plana) são discretizados por estes elementos de descontinuidades e pelos elementos triangulares de seis nós caracterizados por apresentarem uma deformação linear. Como a dissipação pode ocorrer em ambos os tipos de elementos, os resultados obtidos são menos sensíveis ao arranjo da malha e necessitando de menos elementos para se obter a mesma qualidade da solução.

Como no caso do Teorema Estático a melhoria da performance dos métodos existentes até então era limitada devido à incapacidade dos algoritmos existentes para resolver problemas lineares de grandes dimensões em particular os originados por problemas tridimensionais. Este facto motivou a criação de algoritmos de programação não linear que permitem avaliar a condição de escoamento plástico associado na sua forma original. O primeiro caso de aplicação desta técnica remonta aos trabalhos de Hodge e Belytschko em 1968 [59], já mencionado anteriormente, onde se define também uma formulação forte do limite superior. Os problemas analisados são discretizados em elementos finitos triangulares de seis nós que adotam uma distribuição quadrática do campo das velocidades, definidos por uma função polinomial geral de segunda ordem de Airy que automaticamente satisfaz a condição que a dissipação das forças exteriores seja positiva. Resulta assim num problema de minimização não linear sem restrições, resolvido através do método de Simplex proposto por Nelder e Mead [109], que corresponde a um técnica que não requer as derivadas da função objetivo. Devido à complexidade desta função a eficiência demonstrada pelo algoritmo de resolução é bastante reduzida.

Em 1991 Huh e Yang [60] utilizaram a programação não linear para resolver problemas de tensão plana. Estes problemas foram discretizados por elementos triangulares de três nós definidos por aproximação linear do campo das velocidades. Os elementos poderiam ser constituídos por materiais que pertencessem à família das funções de cedência definidas pela norma β (que inclui a função de cedência de von Mises). A solução deste método consistia na resolução repetitiva de um sistema de equações através de uma sequência iterativa interior e exterior. Este método apresentou resultados com uma precisão aceitável para um custo computacional modesto.

Paralelamente a estes trabalhos, Gennouni e Le Tallec [52] iniciaram o desenvolvimento de uma formulação diferente não linear que permitia obter estimativas estritas aplicando o Teorema Cinemático da Análise Limite, sendo este trabalho continuado por diversos autores, destacando-se os autores [61, 9, 151]. Este método cinemático foi inicialmente baseado numa técnica de regularização visco-plástica de Norton-Hoff [112], que consiste em substituir a lei rígida perfeitamente plástica pela lei generalizada de Norton-Hoff porque à medida que a viscosidade tende para zero a dissipação visco-plástica converge para a dissipação plástica [44].

Com os trabalhos de Vicente da Silva e Antão [152, 153, 154] deixou de ser necessário utilizar a técnica de regularização visco-plástica de Norton-Hoff. Esta formulação proposta por Vicente da Silva e Antão apresenta a capacidade de obter limites estritos superiores para problemas bidimensionais e tridimensionais. Os problemas podem assim ser discretizados em elementos triangulares ou tetraedros, podendo ser definidos por um campo de deformações lineares ou constantes. Para resolver o problema de otimização não linear resultante aplicou-se o método do Lagrangeano aumentado (como na forma original), associado com uma variante do algoritmo de Uzawa [48]. Este algoritmo permite decompor o problema complexo não linear em dois sub-problemas de menor dimensão que apresentam uma maior facilidade de resolução. O primeiro resulta num problema quadrático sem restrições facilmente resolvido através de um sistema linear de equações. O segundo trata-se da não linearidade do problema realizada de uma forma local. Esta formulação tem contribuído com alguns avanços científicos, devido à sua capacidade de processamento em paralelo permitindo assim resolver problemas que apresentem um elevado número de graus de liberdade.

Seguindo o raciocínio das formulações fortes do Teorema Estático da Análise Limite muitos grupos de trabalho desenvolveram paralelamente a formulação forte do Teorema Cinemático baseando-se nas mesmas técnicas de programação matemática, exemplo disso são os trabalhos de [80, 25, 66, 88, 69].

Atualmente, do conhecimento do autor, existem apenas duas ferramentas numéricas eficientes que permitem a resolução tridimensional completa (TE e TC) da Análise Limite, ambas pertencem à classe dos denominados Método de Ponto Interior (MPI). Nestas ferramentas utiliza-se a programação cônica de segunda ordem e a programação cônica para a resolução dos problemas resultantes da Análise Limite, designado respetivamente por OxLIM e OPTUM.

O programa OxLIM é constituído por dois módulos distintos que permitem resolver o Teorema Estático e Cinemático da Análise Limite através da biblioteca MOSEK [12], que é um algoritmo que permite resolver de forma eficiente a programação cónica de segunda ordem de forma paralela e sequencial [87, 88, 89]. Este programa já foi utilizado para estudar a estabilidade de um grande número de problemas geotécnicos, incluindo fundações bidimensionais [92] e tridimensionais [39], estabilidade de taludes [89, 92], túneis circulares [92] e condutas offshore [93].

Por outro lado, o programa OPTUM é dividido na vertente 2D e 3D, sendo a primeira incorporada num programa comercial chamado de Op⁺um^{G2} [65]. Este programa apresenta um módulo unificado que permite resolver ambos os teoremas da Análise Limite através do algoritmo SONIC [67] que é um algoritmo desenvolvido pelos mesmos autores do programa. Trata-se de um algoritmo primal-dual de ponto interior cónico, permitindo resolver problemas de forma robusta de uma forma sequencial ou paralela, que teve como base um algoritmo de programação cónica quadrada [6]. Como o programa OxLIM, esta ferramenta numérica OPTUM já foi utilizada para inúmeros problemas geotécnicos [82, 62, 74, 119].

3.4 Adaptabilidade

As técnicas de adaptabilidade permitem um rearranjo espacial mais eficiente dos elementos finitos, permitindo que os resultados obtidos pelos teoremas da Análise Limite para uma malha com os mesmos graus de liberdade sejam de qualidade superior. Este objetivo é atingido através da definição de um critério onde se escolhem de forma automática os elementos críticos que necessitam de um maior refinamento, isto é, procede-se à subdivisão dos elementos críticos em elementos de menores dimensões que os originais mas de dimensão semelhantes entre si.

O primeiro trabalho apresentando estratégias adaptativas para problemas de Análise Limite remonta a Christiansen e Pedersen [23] em que extrapolaram as técnicas utilizadas no modelo elástico. Neste trabalho estudou-se a utilização de técnicas de refinamento de malhas triangulares com deformação constante, denominadas de refinamento regular [127] e refinamento por bissecção do lado mais longo [126], combinadas com dois critérios de refinamento distintos. No primeiro critério, denominado por estratégia de deformação, apenas se procede ao refinamento dos elementos quando a norma das componentes da taxa de deformação é superior a uma constante dada. No segundo critério, denominado por estratégia de tensão, apenas se procede ao refinamento dos elementos quando se verifica a igualdade da função de cedência a menos de erro. Analisaram-se estas estratégias através do estudo de dois problemas em deformação plana (chapa com entalhe e pressão de um bloco sobre um meio semi-infinito) registando-se um desempenho satisfatório. Sendo que a estratégia de deformação com o refinamento regular é a que apresenta melhores resultados. Contudo, esta estratégia apresentava a limitação de não possuir um estimador local, que permitiria prever o tamanho desejável para os

elementos da malha em vez de somente identificar as zonas a refinar. Com os trabalhos de [18] esta limitação foi ultrapassada, através da utilização de um indicador a posteriori baseado num erro local de interpolação direcional e num esquema de recuperação do gradiente e da Hessiana do campo das velocidades. Estes campos são recuperados com base numa média ponderada, dada pela inversa da distância, das contribuições de pontos vizinhos. Contudo esta recuperação pode ser também executada através da técnica *path recovery* proposta por Zienkiewicz e Zhu [165, 166]. Esta estratégia resulta assim num processo adaptativo anisotrópico, produzindo uma deformação intencional na malha refinada, orientando e distorcendo os elementos ao longo das descontinuidades ocorridas no colapso plástico, recorrendo para isso um gerador de malhas triangulares através da técnica *advancing front* [116]. Os diferentes problemas (deformação e tensão plana) analisados através da utilização do campo escalar dos multiplicadores plásticos como variável de controlo, permitiu detetar as descontinuidades devido a variações rápidas e abruptas das deformações plásticas. Como consequência, a malha adaptativa melhora significativamente a avaliação numérica da carga de colapso, afetando de uma forma muito reduzida o tempo total de cálculo do algoritmo.

Em [83], adaptou-se da formulação mista, a técnica de recuperação proposta no trabalho supramencionado para a uma formulação do limite inferior. Neste trabalho fez-se um estudo comparativo utilizando diferentes variáveis de controlo (Campo, Gradiente ou Hessiana dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade) associados com diferentes esquemas adaptativos (refinamentos isotrópicos, anisotrópicos e orientadores de elementos em forma de leque). Utilizou-se um gerador de malhas triangulares baseado na técnica *advancing front* apresentando a possibilidade de orientar elementos em forma de leque nas zonas de singularidade, permitindo assim uma maior rotação das tensões principais [22]. Para problemas envolvendo singularidades de tensão, os melhores resultados foram obtidos considerando a Hessiana dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade como variável de controlo e considerando um refinamento isotrópico introduzindo elementos em forma de leque. Por outro lado, quando não existem singularidades, os melhores resultados foram obtidos considerando o gradiente dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade como variável de controlo e considerando um refinamento isotrópico. Como se conclui, os multiplicadores de Lagrange para as equações de desigualdade são um bom estimador do erro local, porque indicam qual a desigualdade que está ativa, isto é, indicam qual o ponto tensão que se encontra em escoamento plástico.

Mais recentemente, Ciria [24] e Muñoz [106] sugerem uma novo estimador de erro local resultante da diferença entre a energia plástica dissipada num elemento através da formulação do limite superior e através da formulação do limite inferior. Para esta nova medida ser viável é necessário que as malhas apresentem a mesma discretização espacial. Apenas se procede ao refinamento dos elementos que apresentem uma maior influência no erro global. Este refinamento é executada de uma forma regular, onde cada

elemento é dividido em quatro triângulos. Dos exemplos analisados, em tensão e deformação plana, ficou demonstrado o bom desempenho deste novo estimador, permitindo identificar corretamente o mecanismo de colapso.

Em Muñoz [105], utilizando a mesma técnica, procede-se à primeira tentativa de estender a adaptabilidade para o caso tridimensional, contudo verificaram-se alguns problemas de convergência. Melhores resultados foram atingidos com os trabalhos de Martin [94] apresentando resultados satisfatórios para “fundações tridimensionais” em solos puramente coesivos permitindo reduzir a diferença entre os resultados obtidos pelos teoremas da Análise Limite. A técnica empregue neste trabalho já tinha sido anteriormente testada pelo mesmo autor [92] para o caso bidimensional. O estimador de erro é baseado na variação espacial da máxima taxa de deformação por corte (dado ser proporcional à dissipação plástica interna). Com base neste erro geram-se os elementos utilizando o programa TetGen [135].

Como se pode constatar começam agora a surgir na literatura os primeiros trabalhos de adaptabilidade para o caso de estruturas 3D, para os quais a implementação de uma abordagem deste género mais se justificaria na busca da carga de colapso real das estruturas.

Capítulo 4

Formulação de Elementos Finitos

4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se de uma forma detalhada o modelo de elementos finitos desenvolvido, cuja solução é obtida pelo Método de Direção Alternada de Multiplicadores, MDAM.

O Método de Direção Alternada de Multiplicadores, (tradução literal da designação em inglês “Alternating Direction Method of Multipliers”) é um algoritmo que combina a capacidade de decomposição do Método Dual Ascendente (tradução literal da designação em inglês “Dual Ascent Method”) com a convergência robusta do Método dos Multiplicadores (tradução literal da designação em inglês “Method of Multipliers”). O conceito do MDAM começou a ser desenvolvido em França por Glowinski [49] e Gabay [45] mas só por volta da década de 90 o método foi definitivamente estabelecido [40, 148, 41]. Este método também é correntemente designado por Direção Alternada do Lagrangeano Aumentado (DALA), tradução literal da designação em inglês “Alternating Direction Augmented Lagrangian”, ou Método de Separação de Bregman [120] e demonstra uma grande semelhança com outros algoritmos da família do Método de Ponto Próximo, tradução literal da designação em inglês “Proximal Point Method” [42]. Além disso, o algoritmo de otimização não linear MDAM na forma apresentada por Glowinski [48] corresponde a uma variante do algoritmo iterativo de Uzawa [150].

O Método de Direção Alternada de Multiplicadores apresenta uma enorme eficácia e robustez (minimizando os casos de não convergência) e um algoritmo paralelizável, sendo esta última característica uma das principais razões da utilização deste algoritmo. Estas propriedades foram comprovadas pelos excelentes resultados obtidos na sua aplicação ao Teorema Cinemático da Análise Limite [153, 10, 8] mostrando ser uma alternativa competitiva às formulações existentes no contexto da Análise Limite. Assim pretende-se estender a formulação existente do Teorema Cinemático para o seu complementar, a formulação do Teorema Estático da Análise Limite.

Assim, neste capítulo é inicialmente definido o algoritmo do Método de Direção Alternada de Multiplicadores. Posteriormente, com base no enquadramento teórico estabelecido no capítulo 2, expõe-se o problema do Teorema Cinemático e do Teorema Estático discretizado em elementos finitos na forma de um problema MDAM. Em seguida, baseado na teoria da dualidade, define-se a formulação de elementos finitos dual do Teorema Cinemático e do Teorema Estático na forma de um problema MDAM.

Por fim, para terminar este capítulo, demonstra-se a equivalência entre as formulações propostas do Teorema Cinemático e Estático na vertente original com a correspondente vertente dual. Todas as formulações expostas serão capazes de determinar estimativas de elevado grau de precisão de cargas de colapso de problemas bidimensionais (estados planos de deformação/tensão) e tridimensionais recorrendo a uma utilização estrita dos Teoremas da Análise Limite.

4.2 Método de Direção Alternada de Multiplicadores

O algoritmo do Método de Direção Alternada de Multiplicadores permite resolver problemas de programação matemática com a seguinte forma padrão [21],

$$\min \quad g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{z}) \quad (4.1a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{z} = \mathbf{c} \quad (4.1b)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de otimização, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ e $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^l$ são as matrizes de transformação lineares com $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^l$ a representar o vetor resultante desta transformação. Resumidamente este método divide a função objetivo g_0 , equação (2.27a), em duas funções através da decomposição da variável original em duas partes, \mathbf{x} e \mathbf{z} . As duas funções objetivo resultantes (4.1a), g e h , são definidas como funções fechadas, próprias (domínio não vazio), convexas e estendidas, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $h : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} g_{\mathbb{R}c}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{D}g_{\mathbb{R}c} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.2a)$$

$$h(\mathbf{z}) = \begin{cases} h_{\mathbb{R}c}(\mathbf{z}) & \mathbf{z} \in \mathbb{D}h_{\mathbb{R}c} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.2b)$$

onde $g_{\mathbb{R}c}$ e $h_{\mathbb{R}c}$ representam a parte real das funções g e h , respetivamente. As propriedades das funções (4.2) são pouco restritivas permitindo assim resolver uma vasta gama de problemas convexos, mais precisamente no ponto de vista da Análise Limite, permite lidar com a grande maioria das formas da função de cedência.

Define-se o Lagrangeano Aumentado do problema definido na equação (4.1), que corresponde a adicionar ao funcional Lagrangeano, equação (2.34), um termo de penalidade quadrática que permite reforçar a verificação da restrição de igualdade (4.1b) através do parâmetro de penalidade $\rho \in \mathbb{R}_0^+$,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T(\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \quad (4.3)$$

O algoritmo 1, expressa o esquema clássico do MDAM, consiste então num processo iterativo em ordem a k , em que se procede sistematicamente à minimização alternada e sucessiva do Lagrangeano Aumentado (4.3) em ordem às variáveis primais, \mathbf{x} e \mathbf{z} , considerando nestes processos as restantes variáveis como constantes. Por fim, procede-se à atualização das variáveis duais, \mathbf{y} , sendo o tamanho do passo definido pelo parâmetro ρ .

Algoritmo 1 Esquema clássico do MDAM

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1: Arbitrar $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{R}^m; \mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^l$ | ▷ Inicialização |
| 2: $k \leftarrow 0$ | |
| 3: Repetir | |
| 4: $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k)$ | ▷ Minimização em \mathbf{x} |
| 5: $\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}, \mathbf{y}^k)$ | ▷ Minimização em \mathbf{z} |
| 6: $\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c})$ | ▷ Atualização de \mathbf{y} |
| 7: $k \leftarrow k + 1$ | |
| 8: Até | ▷ Critério de paragem |
-

A ideia principal de aplicar este algoritmo no desenvolvimento de formulações de Análise Limite corresponde a explorar a capacidade de decomposição do problema original de otimização em dois subproblemas de mais simples resolução. Assim, tendo em consideração os problemas da Análise limite, procede-se à descrição mais detalhada das três etapas que definem o algoritmo 1.

4.2.1 Minimização global

Considera-se que o passo 4 do algoritmo 1 é designada por minimização global, dado que na Análise Limite se define \mathbf{x} como a variável global que incorpora a contribuição de todo o domínio do corpo (somatório de todas as contribuições). Para realizar esta minimização começa-se por retirar do Lagrangeano Aumentado (4.3) todas as expressões que não dependam da variável \mathbf{x} , dado que as expressões que são constantes não afetam a determinação do ponto de estacionariedade do funcional Lagrangeano em ordem a \mathbf{x} . Assim o Lagrangeano Aumentado para o caso particular da minimização global pode ser representado na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_G(\mathbf{x}^{k+1}) = g(\mathbf{x}^{k+1}) + (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1})^T \mathbf{y}^k + \frac{\rho}{2} (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1})^T (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + 2\mathcal{B}\mathbf{z}^k - 2\mathbf{c}) \quad (4.4)$$

Observando então os problemas resultantes da aplicação dos Teoremas da Análise Limite, equações (2.30) e (2.33), assume-se que seria mais útil definir como variáveis globais as que representam funções objetivo lineares sujeitas a restrições lineares dado serem as que apresentam uma resolução global mais simples. Assim, a definição (4.2a), pode ser reformulada da seguinte forma,

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{d}^T \mathbf{x} & \mathcal{C}\mathbf{x} = \mathbf{a} \\ +\infty & \mathcal{C}\mathbf{x} \neq \mathbf{a} \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ é uma matriz de transformação linear com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$ a representar o vetor resultante desta transformação. Adicionalmente, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ representa um vetor de transformação linear presente na função objetivo. Introduzindo a definição da função g , expressa pela expressão (4.5), no Lagrangeano Aumentado da minimização global (4.4), resulta que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = & \mathbf{d}^T \mathbf{x}^{k+1} + (\boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T (\mathbf{a} - \mathcal{C} \mathbf{x}^{k+1}) \\ & + (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1})^T \mathbf{y}^k + \frac{\rho}{2} (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1})^T (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} + 2\mathcal{B} \mathbf{z}^k - 2\mathbf{c}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ representa os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdade referente ao domínio de $g_{\mathcal{R}}$.

O problema da minimização global resulta então em:

$$\begin{aligned} \min \quad \mathcal{L}_G(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = & \mathbf{d}^T \mathbf{x}^{k+1} + (\boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T (\mathbf{a} - \mathcal{C} \mathbf{x}^{k+1}) \\ & + (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1})^T \mathbf{y}^k + \frac{\rho}{2} (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1})^T (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} + 2\mathcal{B} \mathbf{z}^k - 2\mathbf{c}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

que representa a minimização de um problema quadrático sem restrições. O resultado deste problema (4.7) passa pela determinação do ponto de estacionariedade do funcional Lagrangeano em ordem às variáveis primais \mathbf{x} ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})}{\partial \mathbf{x}^{k+1}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{d} - \mathcal{C}^T \boldsymbol{\lambda}^{k+1} + \mathcal{A}^T \mathbf{y}^k + \rho \mathcal{A}^T (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B} \mathbf{z}^k - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

e $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{k+1}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} - \mathcal{C} \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Re-arranjando estas equações obtém-se o seguinte sistema linear de equações,

$$\begin{bmatrix} \rho \mathcal{A}^T \mathcal{A} & -\mathcal{C}^T \\ -\mathcal{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} - \mathcal{A}^T \mathbf{y}^k - \rho \mathcal{A}^T (\mathcal{B} \mathbf{z}^k - \mathbf{c}) \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde o sistema governativo é definido por uma matriz quadrada simétrica \mathbb{R}^{n+q} .

4.2.2 Minimização local

A próxima fase do algoritmo 1, corresponde ao passo 5 que é designada por minimização Local, dado que na Análise Limite se define \mathbf{z} como uma variável local que engloba a contribuição independente de cada elemento no domínio do corpo (considerando a contribuição parcial). Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na minimização global (secção 4.2.1), define-se neste caso, em ordem à variável de decisão \mathbf{z} , o Lagrangeano Aumentado para o caso particular da minimização local,

$$\mathcal{L}_L(\mathbf{z}^{k+1}) = h(\mathbf{z}^{k+1}) + (\mathcal{B} \mathbf{z}^{k+1})^T \mathbf{y}^k + \frac{\rho}{2} (\mathcal{B} \mathbf{z}^{k+1})^T (2\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B} \mathbf{z} - 2\mathbf{c}) \quad (4.11)$$

Observando então os problemas resultantes da aplicação dos Teoremas da Análise Limite, equações (2.30) e (2.33), define-se como variáveis locais as que apresentam funções objetivo não lineares sujeitas a restrições não lineares. Procede-se desta forma porque este

tipo de problemas complexos são tanto mais fáceis de resolver quanto menor o número de variáveis, isto é, quanto menor o tamanho do problema de otimização. Introdz-se assim a definição da função h , expressa pela expressão (4.2b), no Lagrangeano Aumentado da minimização local (4.11). Logo o problema de minimização local pode ser expresso da seguinte forma:

$$\min \quad \mathcal{L}_L(\mathbf{z}^{k+1}) = h_{\mathbb{R}^c}(\mathbf{z}^{k+1}) - (\mathbf{z}^{k+1})^T \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\rho}{2} (\mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1})^T \mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1} \quad (4.12a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{z}^{k+1} \in \mathbb{D}h_{\mathbb{R}^c} \quad (4.12b)$$

onde $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^m$ corresponde a um vetor de transformação linear que afeta o termo linear da variável \mathbf{z} :

$$\boldsymbol{\Lambda} = -\mathcal{B}^T (\mathbf{y}^k + \rho(\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{c})) \quad (4.13)$$

O problema resultante, equação (4.12), corresponde a um problema de otimização não linear sujeito a restrições. Ao contrário da minimização global, a resolução deste problema é mais complexo. A resolução deste problema consiste normalmente (quando a função $h_{\mathbb{R}^c}$ é diferencial) na determinação do ponto de estacionariedade, \mathbf{z}_u , do funcional Lagrangeano (4.12a) em ordem às variáveis primais \mathbf{z} ,

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{L}_L(\mathbf{z}^{k+1}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{z}_u^{k+1} = \frac{1}{\rho} (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} - \nabla_{\mathbf{z}} h_{\mathbb{R}^c}(\mathbf{z}^{k+1})) \quad (4.14)$$

De seguida, testa-se esta solução a ver se pertence ao domínio possível, equação (4.12b), se verificar, estamos perante a solução ótima do problema \mathbf{z}^* , caso contrário, é necessário projetar a solução \mathbf{z}_u para o domínio possível $\mathbb{D}h_{\mathbb{R}^c}$.

4.2.3 Atualização do multiplicador de Lagrange

Por fim o algoritmo 1 termina com o passo 6, chamado de atualização do multiplicador de Lagrange, onde, como o nome indica se procede à atualização da variável dual \mathbf{y} . Esta atualização é realizada com base no erro observado na correspondente restrição, afetada pelo parâmetro ρ que controla o tamanho do vetor. Observando novamente os problemas resultantes da aplicação dos Teoremas da Análise Limite, equações (2.30) e (2.33), percebe-se que a restrição (4.1b) corresponde a uma compatibilização das grandezas globais com as locais. Sendo assim, a atualização dos multiplicadores de Lagrange pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \rho (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1}) \quad (4.15)$$

onde o vetor \mathbf{c} assume o valor nulo.

4.2.4 Critério de Paragem

Para se definir o critério de paragem deste algoritmo é necessário recorrer às condições de KKT, equação (2.42), mais especificamente às condições necessárias e suficientes de

otimização para o problema MDAM, equação (4.1), que são a condição de viabilidade primal (2.42c),

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^* + \mathcal{B}\mathbf{z}^* = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

e a condição de viabilidade dual equação (2.42a):

$$\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}^*) + \mathcal{A}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{0} \quad (4.17a)$$

$$\nabla_{\mathbf{z}}h(\mathbf{z}^*) + \mathcal{B}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{0} \quad (4.17b)$$

Pelo passo 5 do algoritmo 1, percebe-se que \mathbf{z}^{k+1} minimiza o Lagrangeano Aumentado $\mathcal{L}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}, \mathbf{y}^k)$, logo:

$$\nabla_{\mathbf{z}}h(\mathbf{z}^{k+1}) + \mathcal{B}^T \mathbf{y}^k + \rho \mathcal{B}^T (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1}) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Posteriormente, considerando que a expressão (4.16) corresponde ao resíduo primal \mathbf{r}_p , na iteração $k + 1$, é dado por:

$$\mathbf{r}_p^{k+1} = \mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^{k+1} \quad (4.19)$$

onde esta expressão, pela equação (4.15), pode ser apresentada na seguinte fórmula alternativa equivalente:

$$\mathbf{r}_p^{k+1} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^k) \quad (4.20)$$

e considerando novamente a definição (4.15) é possível simplificar a equação (4.18) da seguinte forma:

$$\nabla_{\mathbf{z}}h(\mathbf{z}^{k+1}) + \mathcal{B}^T (\mathbf{y}^k + \rho \mathbf{r}_p^{k+1}) = \nabla_{\mathbf{z}}h(\mathbf{z}^{k+1}) + \mathcal{B}^T \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

Através desta igualdade, conclui-se que a segunda equação de viabilidade dual (4.17b) se verifica sempre.

Considerando agora o enunciado na minimização global (secção 4.2.1), isto é, que \mathbf{x}^{k+1} minimiza o Lagrangeano Aumentado $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k)$:

$$\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}^{k+1}) + \mathcal{A}^T \mathbf{y}^k + \rho \mathcal{A}^T (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^k) = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

procede-se a um rearranjo desta equação, obtendo-se:

$$\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}^{k+1}) + \mathcal{A}^T (\mathbf{y}^k + \rho (\mathcal{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B}\mathbf{z}^k)) + \rho \mathcal{A}^T \mathcal{B} (\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^{k+1}) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

e por fim, através da definição (4.15), obtém-se a expressão para o resíduo dual, \mathbf{r}_d , na iteração $k + 1$:

$$\mathcal{A}^T \mathbf{r}_d^{k+1} = \rho \mathcal{A}^T \mathcal{B} (\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k) = \nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}^{k+1}) + \mathcal{A}^T \mathbf{y}^{k+1} \quad (4.24)$$

com,

$$\mathbf{r}_d^{k+1} = \rho |\mathcal{B}| (\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k) \quad (4.25)$$

Através da igualdade (4.24), conclui-se que a primeira equação de viabilidade dual (4.17a) é verificada apenas quando o resíduo dual for zero.

Estes resíduos convergem para zero com o decorrer do processo iterativo do MDAM, como ficou provado em Boyd [21], por isso o critério de paragem escolhido corresponde em limitar o resíduo primal e dual através de duas constantes positivas de pequena escala, chamadas respetivamente de tolerância primal, ϵ^{primal} e tolerância dual, ϵ^{dual} .

4.2.5 Extensões da formulação clássica

Existem muitas extensões ao algoritmo clássico do MDAM, algoritmo 1, que foram propostas na literatura [21], contudo apenas se estudaram extensões diretamente relacionadas com o parâmetro de penalidade. De seguida apresenta-se uma descrição das extensões que fazem parte do algoritmo final (algoritmo 2) utilizado na resolução dos problemas da Análise Limite, bem como de uma variação testada. Esta variação não faz parte do algoritmo final porque não contribuiu eficientemente para o melhoramento da convergência da solução.

Algoritmo 2 Esquema final do MDAM

- 1: Arbitrar $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^l$ ▷ Inicialização
 - 2: Definir $\vartheta > 1$; $\mu > 1$
 - 3: $\rho \leftarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} \mathcal{C}^T$ ▷ Estimar ρ
 - 4: $k \leftarrow 0$
 - 5: **Repetir**
 - 6: Resolver $\begin{bmatrix} \rho \mathcal{A}^T \mathcal{A} & -\mathcal{C}^T \\ -\mathcal{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d} - \mathcal{A}^T (\mathbf{y}^k + \rho \mathcal{B} \mathbf{z}^k) \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix}$ ▷ Minimização em \mathbf{x}
 - 7: $\boldsymbol{\Lambda} \leftarrow -\mathcal{B}^T (\mathbf{y}^k + \rho (\mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{c}))$ ▷ Minimização em \mathbf{z}
 - 8: $\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow \inf \{h_{\mathcal{K}_c}(\mathbf{z}) - \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Lambda} + \frac{\rho}{2} (\mathcal{B} \mathbf{z})^T \mathcal{B} \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathbb{D}h_{\mathcal{K}_c}\}$
 - 9: $\mathbf{r}_p^{k+1} \leftarrow \mathcal{A} \mathbf{x}^{k+1} + \mathcal{B} \mathbf{z}^{k+1}$ ▷ Resíduo primal
 - 10: $\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho \mathbf{r}_p^{k+1}$ ▷ Atualização de \mathbf{y}
 - 11: $\mathbf{r}_d^{k+1} \leftarrow \rho |\mathcal{B}| (\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k)$ ▷ Resíduo dual
 - 12: $\rho \leftarrow \begin{cases} \vartheta \rho & \|\mathbf{r}_p^{k+1}\| > \mu \|\mathbf{r}_d^{k+1}\| \\ \rho / \vartheta & \|\mathbf{r}_d^{k+1}\| > \mu \|\mathbf{r}_p^{k+1}\| \\ \rho & \text{Caso contrário} \end{cases}$ ▷ Atualização do ρ
 - 13: $k \leftarrow k + 1$
 - 14: **Até** $\|\mathbf{r}_p^{k+1}\| < \epsilon^{\text{primal}}$ e $\|\mathbf{r}_d^{k+1}\| < \epsilon^{\text{dual}}$ ▷ Critério de paragem
-

4.2.5.1 Estimativa inicial do Parâmetro de Penalidade

Como ficou demonstrado com os trabalhos de Vicente da Silva [151] a escolha da estimativa inicial do parâmetro de penalidade, ρ , influencia significativamente a performance do algoritmo MDAM. Assim, tendo em conta estes trabalhos, considerou-se que a estimativa inicial do parâmetro de penalidade corresponde ao valor absoluto unitário do complemento de Schur [163] de $(\rho \mathcal{A}^T \mathcal{A})$ na matriz do sistema governativo (passo 6 do algoritmo 2), isto é:

$$\left| 0 - (-\mathcal{C}) (\rho \mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} (-\mathcal{C}^T) \right| = 1 \rightarrow \rho = \mathcal{C} (\mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} \mathcal{C}^T \quad (4.26)$$

4.2.5.2 Variação do Parâmetro de Penalidade

Seguindo os mesmos trabalhos de Vicente da Silva [151], percebe-se também que o desempenho do algoritmo pode sofrer grandes melhorias com a possibilidade de escolher

diferentes parâmetros de penalidade ao longo do processo iterativo. A convergência desta extensão fica provada facilmente, porque se considera que ρ mantém-se constante passado um número finito de iterações, permitindo assim aplicar a teoria de convergência de ρ fixo [21]. O esquema utilizado foi baseado nos trabalhos de He [55] e Wang [156], onde através de algumas modificações se obteve a seguinte técnica,

$$\rho = \begin{cases} \vartheta \rho & \|r_p^k\| > \mu \|r_d^k\| \\ \rho / \vartheta & \|r_d^k\| > \mu \|r_p^k\| \\ \rho & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

onde $\vartheta > 1$ é o parâmetro que escala o tamanho do passo e $\mu > 1$ é o parâmetro que controla o tamanho da abertura da zona de confiança. Os valores usuais destes parâmetros são $\vartheta = 2$ e $\mu = 10$. A sua representação gráfica pode ser caracterizada de duas formas, figura 4.1, consoante se pretenda uma melhor compreensão da evolução ao nível do resíduo, figura 4.1(a), ou ao nível das iterações, figura 4.1(b). Nestas figuras os resíduos são sempre apresentados em escala logarítmica para uma melhor compreensão da convergência da solução.

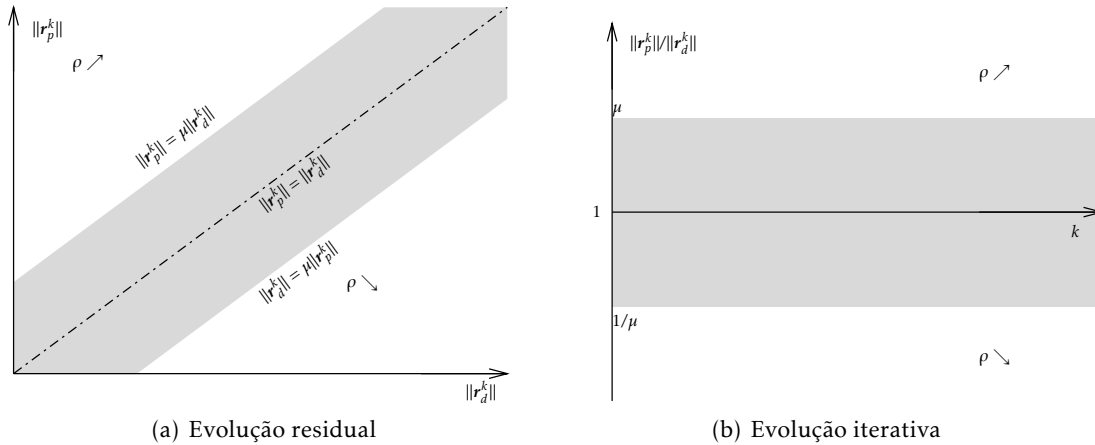


Figura 4.1: Esquema utilizado na variação do parâmetro de penalidade

Este esquema apresenta a mesma ideia do Método da Região de Confiança [51], mas neste caso, utilizam-se os resíduos para avaliar o melhoramento do valor da solução. Por isso, se o valor do resíduo primal for superior em relação ao resíduo dual para além da zona de confiança, quer dizer que o modelo está a melhorar a solução de uma forma eficiente, o que permite que o tamanho do passo pode ser aumentado. Contudo, este aumento provoca um aumento da penalização na violação da condição de viabilidade primal o que provoca que o resíduo primal sofra uma redução, para além disso provoca um aumento do resíduo dual demonstrado pela sua equação (4.25).

Por outro lado, se o valor do resíduo primal for reduzido em relação ao resíduo dual para além da zona de confiança, o modelo está a melhorar a solução de uma forma pouco eficiente provocando que seja necessário reduzir o tamanho do passo dado. Esta redução provoca como se viu um aumento no resíduo primal e uma redução do resíduo dual.

4.2.5.3 Variação Testada

A variação testada corresponde à definição de um parâmetro de penalidade distinto para cada conjunto de restrições. Na vertente da Análise Limite, estes conjuntos referem-se de uma forma mais global, a conjuntos de elementos, e de uma forma mais local, a conjuntos de nós. Para se obter esta técnica basta substituir no Lagrangeano Aumentado, equação (4.3), o termo de penalidade quadrático por,

$$\frac{\rho}{2} \|r_p\|^2 \rightarrow \frac{1}{2} r_p^T \mathcal{P} r_p \quad (4.28)$$

onde r_p é definido pela equação (4.19) e $\mathcal{P} : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^l$ é uma matriz simétrica definida positiva que armazena os termos de penalidade de cada restrição. Esta alteração provoca basicamente a substituição de todos os produtos de ρ por multiplicações matriciais,

$$\rho \square^T \rightarrow \square^T \mathcal{P} \quad (4.29)$$

o que origina que em vez de se ter um passo uni-direcional passa-se a ter um passo multi-direcional. Adicionalmente, aplica-se nesta técnica, o raciocínio de variação do parâmetro de penalidade, equação (4.27), de uma forma local. Assim, este método envolve um maior esforço computacional aliado a uma maior dificuldade de estabilização da solução, tornando assim a ferramenta numérica pouco eficiente e mais instável a pequenas variações do parâmetro de penalidade, razões pela quais este método não faz parte do algoritmo final utilizado (algoritmo 2).

4.3 Problema Primal

Após a descrição pormenorizada do Método de Direção Alternada de Multiplicadores, secção 4.2, discretiza-se o problema primal do Teorema Estático da Análise Limite, equação (2.30), e o problema primal do Teorema Cinemático da Análise Limite, equação (2.33), através da técnica de elementos finitos, formulando-os segundo a forma padrão deste algoritmo.




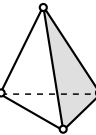
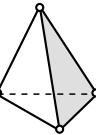
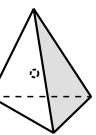
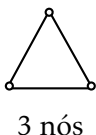
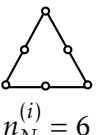
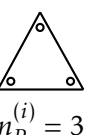
4.3.1 Formulação do Teorema Cinemático

Considera-se que o corpo contínuo analisado, representado na figura 2.1, é discretizado em n_E elementos finitos. Para a formulação do Teorema Cinemático da Análise Limite adotou-se como aproximações independentes, o campo das velocidades e o campo da taxa das deformações plásticas como variáveis primais. Assim em cada elemento finito i aproxima-se o campo das velocidades e da taxa de deformação plástica por um produto matriz-vetor,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} &= \boldsymbol{\phi}_e^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde as matrizes $(\phi_v^{(i)}, \phi_e^{(i)})$ armazenam as funções de forma nodais convencionais [164]. O vetor $v^{(i)}$ armazena as componentes do campo das velocidades nos nós do elemento finito i , $n_N^{(i)}$, que são partilhados entre elementos finitos adjacentes através das suas fronteiras, assegurando assim a continuidade de classe C^0 do campo das velocidades. Por outro lado, o vetor $e^{(i)}$ define as componentes do campo da taxa das deformações nos pontos de cada elemento finito i , $n_P^{(i)}$, sendo estes graus de liberdade não partilhados entre elementos adjacentes. Na tabela 4.1 expõem-se os elementos finitos utilizados, apresentando as suas características tanto em termos geométricos como nos respetivos campos de aproximação.

Tabela 4.1: Elementos finitos para a formulação do Teorema Cinemático

Tipo de Elemento	Forma	$v^{(i)}$	$e^{(i)}$
Linear (isoparamétrico)			
	3 nós $n_N^{(i)} = 3$	$n_N^{(i)} = 3$	$n_P^{(i)} = 1$
Quadrático (subparamétrico)			
	4 nós $n_N^{(i)} = 4$	$n_N^{(i)} = 4$	$n_P^{(i)} = 1$
Quadrático (subparamétrico)			
	4 nós $n_N^{(i)} = 10$	$n_N^{(i)} = 10$	$n_P^{(i)} = 4$

Os elementos lineares (taxa de deformação constante) para mitigar o efeito de *locking*, são arrançados de uma forma especial. Para o caso de problemas de deformação plana necessitam de formar um quadrilátero por cada quatro triângulos onde o nó central se localize na interseção das diagonais (centroide), como ilustrado na figura 4.2.

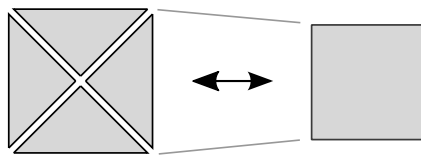


Figura 4.2: Divisão de um elemento quadrangular em quatro triângulos

Por outro lado, para problemas tridimensionais necessitam de formar um hexaedro por cada vinte e quatro tetraedros onde cada tetraedro deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado no centroide de uma das faces, e por último um nó central correspondente ao baricentro do hexaedro, como ilustrado na figura 4.3.

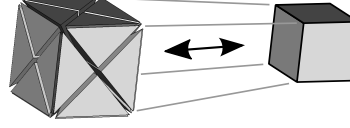


Figura 4.3: Divisão de um hexaedro em vinte e quatro tetraedros

Para evitar este arranjo especial, considerou-se que a discretização fosse sempre realizada pelos elementos definidos em Makrodimopoulos e Martin [88], que correspondem aos elementos quadráticos (taxa de deformação linear) subparamétricos onde as funções de aproximação do campo das velocidades são de grau superior às utilizadas para modelar a geometria do elemento.

Segundo esta discretização, o problema do Teorema Cinemático, equação (2.33), é reformulado segundo a forma de um problema MDAM:

$$\min \quad g(\mathbf{v}) + h(\mathbf{e}) \quad (4.31a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{A}_0^{1/2} (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (4.31b)$$

onde:

$$g(\mathbf{v}) = \begin{cases} -\mathbf{F}_0^T \mathbf{v} & \mathbf{F}^T \mathbf{v} = 1 \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$h(\mathbf{e}) = \begin{cases} \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j) d\Omega & \mathbf{e}_j \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.33)$$

sendo \mathbf{B} o operador discreto de compatibilidade:

$$\mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \quad (4.34)$$

e \mathbf{F} , \mathbf{F}_0 correspondem, respetivamente, ao vetor de forças nodais variáveis e constantes, que são obtidos através da soma da contribuição de cada elemento finito i :

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{\Omega^{(i)}} \left(\boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \right)^T \mathbf{b}^{(i)} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}^{(i)}} \left(\boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \right)^T \mathbf{t}^{(i)} d\Gamma_{\sigma} \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{F}_0^{(i)} = \int_{\Omega^{(i)}} \left(\boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \right)^T \mathbf{b}_0^{(i)} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}^{(i)}} \left(\boldsymbol{\phi}_v^{(i)} \right)^T \mathbf{t}_0^{(i)} d\Gamma_{\sigma} \quad (4.35b)$$

Na função (4.33), \mathbf{e}_j representa o sub-vetor da aproximação à taxa das deformações plásticas no ponto j , sendo n_p o número total de pontos na malha de elementos finitos.

Na reformulação deste problema definiu-se de uma forma equivalente e mais vantajosa a equação de compatibilidade (4.31b) através da multiplicação adicional pelo operador $A_0^{1/2}$. Esta ponderação permite, como se verá posteriormente, que as grandezas duais adquiram significado físico. O operador A_0 corresponde a uma matriz semelhante à identidade, mas nas componentes da diagonal que afetam a deformação por corte apresentam o valor de $1/2$,

$$2\mathbf{D} : \mathbf{A}_0^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix} ; \quad 3\mathbf{D} : \mathbf{A}_0^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Assim com todas as variáveis corretamente definidas já se pode aplicar o algoritmo de resolução MDAM presente no algoritmo 2. Para tornar a compreensão do algoritmo na vertente primal do Teorema Cinemático da Análise Limite mais percetível, apresenta-se na tabela 4.2 um sumário da nomenclatura utilizada em cada uma das fases do Método de Direção Alternada de Multiplicadores.

Tabela 4.2: Nomenclatura do MDAM para a vertente primal do Teorema Cinemático da Análise Limite

MDAM		Teorema Cinemático	
Variáveis	Primais	\mathbf{x}	\mathbf{v}
		\mathbf{z}	\mathbf{e}
	Duais	λ	$\hat{\alpha}$
		\mathbf{y}	$A_0^{-1/2} \hat{\mathbf{s}}$
Funções objetivo	$g_{\mathbb{K}c}(\mathbf{x})$	\mathbf{d}	$-\mathbf{F}_0$
	$\mathbb{D}g_{\mathbb{K}c}$	\mathbf{C}	\mathbf{F}^T
		\mathbf{a}	1
	$h_{\mathbb{K}c}(\mathbf{z})$	$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j) d\Omega$	
	$\mathbb{D}g_{\mathbb{K}c}$	$\mathbf{e}_j \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_P\}$	
Restrição compatibilidade	\mathcal{A}	$A_0^{1/2} \mathbf{B}$	
	\mathcal{B}	$-A_0^{1/2}$	
Dimensões	n	$Dn_N - n_{\Gamma_u}^N$	
	m	$3(D-1)n_P n_E$	
	q	1	
	l	$3(D-1)n_P n_E$	

Do ponto de vista dimensional, n_N corresponde ao número total de nós (independentes) na malha de elementos finitos, $n_{\Gamma_u}^N$ ao número total de componentes, (x, y) para o caso

bidimensional ou (x, y, z) para o caso tridimensional, bloqueadas nos nós pela restrição (2.33d) e D corresponde à dimensão do problema analisado.

A variável dual y é expressa como um produto de uma matriz-vetor porque se pretende que a expressão do Lagrangeano (2.34) seja a mesma caso não se tivesse procedido à reformulação (equivalente) da restrição (4.31b). Assim na tabela 4.2 expressam-se dois novos multiplicadores de Lagrange \hat{a} e \hat{s} , em que o seu significado físico ficará patente aquando da confrontação da sua formulação dual com a formulação do Teorema Estático da Análise Limite.

Na minimização global, passo 6 do algoritmo 2, o sistema governativo apresenta o seguinte aspeto:

$$\begin{bmatrix} \rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{k+1} \\ \hat{a}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 - \mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{s}}^k - \rho \mathbf{A}_0 \mathbf{e}^k) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

onde a matriz quadrada simétrica deste sistema tem dimensões $(Dn_N - n_{\Gamma_u}^N + 1)$ e não corresponde a uma matriz positiva definida, porque apesar de $\rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B}$ ser uma matriz positiva definida [13] o seu complemento de Schur (4.26) assume um valor negativo [163],

$$0 - (-\mathbf{F}^T) (\rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B})^{-1} (-\mathbf{F}) < 0 \quad (4.38)$$

Na minimização local, passo 7 do algoritmo MDAM, resulta no seguinte problema complexo não linear,

$$\min \quad \mathcal{L}_L(\mathbf{e}^{k+1}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j^{k+1}) d\Omega - (\mathbf{e}^{k+1})^T \boldsymbol{\Lambda}_{TC} + \frac{\rho}{2} (\mathbf{e}^{k+1})^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}^{k+1} \quad (4.39a)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{e}_j^{k+1} \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.39b)$$

onde,

$$\boldsymbol{\Lambda}_{TC} = \hat{\mathbf{s}}^k + \rho \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} \quad (4.40)$$

assim a sua génese é conferida não só devido à expressão da dissipação plástica na função objetivo, mas também devido à restrição da condição de normalidade. A complexidade deste problema pode ser reduzida devido às duas características seguintes. Por um lado, como o operador \mathbf{A}_0 corresponde a uma matriz diagonal pode-se decompor este problema (4.39) na soma das contribuições de cada elemento, através da resolução independente do seguinte sub-problema não linear em cada elemento i , da malha de elementos finitos [9]:

$$\min \quad \mathcal{L}_L^*(\mathbf{e}^{(i)}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j^{(i)}) d\Omega - (\mathbf{e}^{(i)})^T \boldsymbol{\Lambda}_{TC} + \frac{\rho}{2} (\mathbf{e}^{(i)})^T \mathbf{A}_0 \mathbf{e}^{(i)} \quad (4.41a)$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{e}_j^{(i)} \in \mathcal{C}_c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p^{(i)}\} \quad (4.41b)$$

reduzindo-se assim o número de variáveis de cada problema para $3(D-1)n_p$. A fim de simplificar a notação utilizada neste problema, equação (4.41), expressa-se os termos $\mathbf{e}^{(i)}$ sem os índices iterativos $(k+1)$. Por outro lado, como os materiais estudados apresentam um comportamento isotrópico e como os produtos vetoriais presentes na equação (4.41a) correspondem a operações de contração tensorial, então por Le Tallec [143], conclui-se que

os eixos principais dos tensores, $\mathbf{\Lambda}_{TC}$ e \mathbf{e} , coincidem. Sendo válida a seguinte transformação de coordenadas,

$$\begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix}^{(i)} = \mathbf{Y}^{(i)} \begin{bmatrix} e_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & e_{II} \end{bmatrix}^{(i)} (\mathbf{Y}^{(i)})^T \quad (4.42)$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{Y}^{(i)}$ agrupa nas colunas os vetores próprios normalizados do tensor, $\mathbf{\Lambda}_{TC}$, associados aos seus valores próprios. Assim, pode-se resolver o sub-problema (4.41) no espaço das direções principais conduzindo também a uma redução das dimensões do espaço das variáveis de decisão, desta feita para Dn_p . As estratégias adotadas para a resolução da minimização local diferem consoante o tipo de critério de cedência, distinguindo-se essencial consoante os materiais exibam ou não uma expressão de dissipação plástica diferenciável. Assim apresenta-se na secção 5.2.2 as estratégias numéricas de resolução do problema (4.41) para os diferentes critérios estudados. Mas em todas as estratégias delineadas a sua solução irá depender do vetor diferenciável da minimização local (4.14), $\mathbf{\Lambda}_u$,

$$\mathbf{\Lambda}_u = (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{TC} = \mathbf{A}_0^{-1} \hat{\mathbf{s}}^k + \rho \mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} \quad (4.43)$$

Por fim, no cálculo dos resíduos primais, passo 9, e duais, passo 11, do algoritmo MDAM obtêm-se as seguintes expressões,

$$\mathbf{r}_p^{k+1} = \mathbf{A}_0^{1/2} (\mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{e}^{k+1}) \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{r}_d^{k+1} = \rho \mathbf{A}_0^{1/2} (\mathbf{e}^{k+1} - \mathbf{e}^k) \quad (4.44b)$$

resultando que a atualização do multiplicador de Lagrange, passo 10, pode ser expressa do seguinte modo,

$$\hat{\mathbf{s}}^{k+1} = \hat{\mathbf{s}}^k + \rho \mathbf{A}_0 (\mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{e}^{k+1}) \quad (4.45)$$

4.3.2 Formulação do Teorema Estático

Para a formulação do Teorema Estático da Análise Limite considerou-se igualmente que o corpo contínuo e de domínio finito analisado, representado na figura 2.1, é discretizado em n_E elementos finitos. Neste caso considerou-se que as duas aproximações (global e local) realizadas seriam feitas em relação ao mesmo campo, assim para cada elemento finito i o campo das tensões (assumido como linear) é aproximado de forma independente e simultânea através do seguinte produto matriz-vetor,




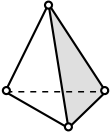
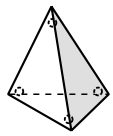
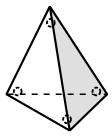
$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \boldsymbol{\phi}^{(i)} \mathbf{s}^{(i)} \quad (4.46a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)} = \bar{\boldsymbol{\phi}}^{(i)} \bar{\mathbf{s}}^{(i)} \quad (4.46b)$$

que representam as variáveis primais deste problema. Sendo definidos pela matriz $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ e pelos vetores $\mathbf{s}^{(i)}$ e $\bar{\mathbf{s}}^{(i)}$ que armazenam respetivamente as funções de forma nodais

convencionais e as componentes de tensão nos pontos de cada elemento finito i , $n_p^{(i)}$, sendo estes graus de liberdade não partilhados entre elementos adjacentes. Na tabela 4.3 expõem-se os elementos finitos utilizados, apresentando as suas características tanto em termos geométricos como nos respetivos campos de aproximação.

Tabela 4.3: Elementos finitos para a formulação do Teorema Estático

Tipo de Elemento	Forma	s	\tilde{s}
Linear (isoparamétrico)			
	3 nós $n_p^{(i)} = 3$	$n_p^{(i)} = 3$	$n_p^{(i)} = 3$
Linear (isoparamétrico)			
	4 nós $n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$

Para o caso do Teorema Estático apenas se considerou que a discretização fosse realizada pelos chamados elementos simplex, que correspondem a elementos de tensão lineares isoparamétricos onde as funções de aproximação do campo das tensões são de grau igual às utilizadas para modelar a geometria do elemento. Segundo esta discretização, o problema do Teorema Estático (2.30) é reformulado segundo a forma de um problema MDAM,

$$\min \quad g(\alpha, s) + h(\tilde{s}) \quad (4.47a)$$

$$\text{sujeito a} \quad A_0^{-1/2} (s - \tilde{s}) = 0 \quad (4.47b)$$

sendo,

$$g(\alpha, s) = \begin{cases} -\alpha & \hat{B}^T s - \alpha \hat{F} = \hat{F}_0 \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.48)$$

$$h(\tilde{s}) = \begin{cases} 0 & f(\tilde{s}_j) \leq 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \\ +\infty & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4.49)$$

onde \tilde{s}_j representa o sub-vetor da aproximação às componentes de tensão no ponto nodal j . Na função (4.48), \hat{B}^T corresponde ao operador discreto generalizado de equilíbrio, sendo definido para cada elemento finito i através do agrupamento de dois blocos distintos,

$$(\hat{B}^{(i)})^T = \begin{bmatrix} -D\phi^{(i)} \\ N^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde $D\phi^{(i)}$ e $N^{(i)}$ representam respetivamente o operador discreto de equilíbrio no elemento e nas fronteiras. Igualmente, os vetores de forças variáveis e constantes associados,

$\hat{\mathbf{F}}$ e $\hat{\mathbf{F}}_0$, também são divididos em dois blocos,

$$\hat{\mathbf{F}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{t}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.51a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^{(i)} \\ \mathbf{t}_0^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.51b)$$

A montagem destes operadores é um pouco diferente do procedimento normalmente aplicado no método de elementos finitos convencional. Com efeito, as contribuições de cada elemento, tanto no equilíbrio do elemento como das fronteiras, são distintos entre si o que faz com que não exista sobreposição de contribuições, mas sim um agrupamento de contribuições. De seguida são definidos estes operadores matriciais e vetoriais para uma melhor compreensão do seu processo de montagem.

Para o caso bidimensional, os operadores assumem o seguinte aspeto,

$$\left[\left(\hat{\mathbf{B}}^{(i)} \right)^T \mid \hat{\mathbf{F}}^{(i)} \right] = \begin{bmatrix} -D\phi_1^{(i)} & -D\phi_2^{(i)} & -D\phi_3^{(i)} & \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{n}_{12}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{12}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_{12}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{21}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_{23}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{23}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{23}^{(i)} & \mathbf{t}_{32}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{31}^{(i)} & \mathbf{t}_{31}^{(i)} \\ \mathbf{n}_{31}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{13}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

onde $-D\phi_j^{(i)}$ e $\mathbf{n}_{jl}^{(i)}$,

$$-D\phi_j^{(i)} = \frac{1}{2A_{jlm}^{(i)}} \begin{bmatrix} \kappa_j^x & 0 & \kappa_j^y \\ 0 & \kappa_j^y & \kappa_j^x \end{bmatrix}^{(i)} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{n}_{jl}^{(i)} = \frac{1}{\Delta_{jl}^{(i)}} \begin{bmatrix} \kappa_m^x & 0 & \kappa_m^y \\ 0 & \kappa_m^y & \kappa_m^x \end{bmatrix}^{(i)} \quad (4.54)$$

representam respetivamente, a matriz de equilíbrio no nó j e a matriz do vetor normal exterior normalizado à fronteira definida pelos nós $j-l$. Sendo $A_{jlm}^{(i)}$ a área do elemento definida pelos nós $j-l-m$, $\Delta_{jl}^{(i)}$ o comprimento da fronteira $j-l$ e κ_m^x, κ_m^y os parâmetros de forma obtidos por permutação cíclica das seguintes expressões,

$$\kappa_m^x = y_l - y_j \quad (4.55a)$$

$$\kappa_m^y = x_j - x_l \quad (4.55b)$$

Assim, os vetores $\mathbf{b}^{(i)}$ e $\mathbf{t}_{jl}^{(i)}$ armazenam as componentes x, y tanto das forças de massa aplicadas no centro de massa do elemento i como das forças aplicadas no nó j da fronteira $j-l$ do elemento i .

Por outro lado, para o caso tridimensional, os operadores apresentam o seguinte aspeto,

$$\left[(\hat{\mathbf{B}}^{(i)})^T | \hat{\mathbf{F}}^{(i)} \right] = \begin{bmatrix} D\phi_1^{(i)} & -D\phi_2^{(i)} & D\phi_3^{(i)} & -D\phi_4^{(i)} & \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{n}_{123}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{123}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_{123}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{231}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{123}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{312}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_{234}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{234}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{234}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{342}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{234}^{(i)} & \mathbf{t}_{423}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{341}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{341}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{341}^{(i)} & \mathbf{t}_{413}^{(i)} \\ \mathbf{n}_{341}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{134}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}_{412}^{(i)} & \mathbf{t}_{412}^{(i)} \\ \mathbf{n}_{412}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{124}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}_{412}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{t}_{241}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

onde neste caso $-D\phi_j^{(i)}$ apresenta o mesmo significado, mas $\mathbf{n}_{jlm}^{(i)}$ corresponde à matriz do vetor normal exterior normalizado à fronteira definida pelos nós $j-l-m$,

$$-D\phi_j^{(i)} = \frac{1}{6V_{jlmn}^{(i)}} \begin{bmatrix} \kappa_j^x & 0 & 0 & \kappa_j^y & 0 & \kappa_j^z \\ 0 & \kappa_j^y & 0 & \kappa_j^x & \kappa_j^z & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_j^z & 0 & \kappa_j^y & \kappa_j^x \end{bmatrix}^{(i)} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{n}_{jlm}^{(i)} = \frac{1}{2A_{jlm}^{(i)}} \begin{bmatrix} \kappa_n^x & 0 & 0 & \kappa_n^y & 0 & \kappa_n^z \\ 0 & \kappa_n^y & 0 & \kappa_n^x & \kappa_n^z & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_n^z & 0 & \kappa_n^y & \kappa_n^x \end{bmatrix}^{(i)} \quad (4.58)$$

sendo $V_{jlmn}^{(i)}$ o volume do elemento definido pelos nós $j-l-m-n$, $A_{jlm}^{(i)}$ a área da fronteira $j-l-m$ e $\kappa_n^x, \kappa_n^y, \kappa_n^z$ os parâmetros de forma obtidos por permutação cíclica das seguintes expressões,

$$\kappa_n^x = (y_l - y_j)(z_m - z_j) - (z_l - z_j)(y_m - y_j) \quad (4.59a)$$

$$\kappa_n^y = (z_l - z_j)(x_m - x_j) - (x_l - x_j)(z_m - z_j) \quad (4.59b)$$

$$\kappa_n^z = (x_l - x_j)(y_m - y_j) - (y_l - y_j)(x_m - x_j) \quad (4.59c)$$

Assim, os vetores $\mathbf{b}^{(i)}$ e $\mathbf{t}_{jlm}^{(i)}$ armazenam as componentes x, y, z tanto das forças de massa aplicadas no centro de massa do elemento i , como das forças aplicadas no nó j da fronteira $j-l-m$ do elemento i .

Neste problema (4.47) definiu-se igualmente a equação de compatibilidade entre tensões (4.47b) de uma forma equivalente e mais vantajosa, através da multiplicação adicional pelo operador $A_0^{-1/2}$. Esta ponderação permite, como se verá posteriormente, que as grandezas duais adquiram significado físico.

Assim com todas as variáveis corretamente definidas já se pode aplicar o algoritmo de resolução MDAM presente no algoritmo 2. Para tornar a compreensão do algoritmo na vertente primal do Teorema Estático da Análise Limite mais perceptível, apresenta-se na tabela 4.4 um sumário da nomenclatura utilizada em cada uma das fases do Método de Direção Alternada de Multiplicadores.

Tabela 4.4: Nomenclatura do MDAM para a vertente primal do Teorema Estático da Análise Limite

MDAM		Teorema Estático	
Variáveis	Primais	\mathbf{x}	$\begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}$
		\mathbf{z}	$\tilde{\mathbf{s}}$
	Duais	$\boldsymbol{\lambda}$	$\hat{\mathbf{v}}$
		\mathbf{y}	$A_0^{1/2} \hat{\mathbf{e}}$
Funções objetivo	$g_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$	\mathbf{d}	$\begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
	$\mathbb{D}g_{\mathcal{K}}$	\mathcal{C}	$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{F}} & \hat{\mathbf{B}}^T \end{bmatrix}$
		\mathbf{a}	$\hat{\mathbf{F}}_0$
	$h_{\mathcal{K}}(\mathbf{z})$		0
	$\mathbb{D}g_{\mathcal{K}}$	$f(\tilde{\mathbf{s}}_j) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_P\}$	
Restrição compatibilidade	\mathcal{A}	$\begin{bmatrix} 0 & A_0^{-1/2} \end{bmatrix}$	
	\mathcal{B}	$-A_0^{-1/2}$	
Dimensões	n	$1 + 3(D-1)n_P n_E$	
	m	$3(D-1)n_P n_E$	
	q	$D(n_E + n_N^{B(i)} n_B) - n_N^{B(i)} n_{\Gamma_u}^B$	
	l	$3(D-1)n_P n_E$	

Do ponto de vista dimensional, $n_N^{B(i)}$ representa o número de nós de cada fronteira do elemento i , onde para os elementos utilizados (tabela 4.3) é verificado $n_N^{B(i)} = D$, por outro lado, n_B corresponde igualmente ao número total de fronteiras (independentes) na malha de elementos finitos que se obtém através da soma das fronteiras de interface independentes, n_{BI} , com as fronteiras exteriores, n_{BE} . Por fim, $n_{\Gamma_u}^B$ representa o número total de componentes bloqueadas nas fronteiras pela restrição (2.33d). De igual forma que no Teorema Cinemático, definiu-se a variável dual \mathbf{y} como um produto de uma matriz-vetor porque se pretende que a expressão do Lagrangeano (2.34) seja a mesma caso não se tivesse procedido à reformulação (equivalente) da restrição $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}$. Assim na tabela 4.4 expressam-se dois novos multiplicadores de Lagrange $\hat{\mathbf{e}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$, em que o seu significado físico ficará patente aquando da confrontação da sua formulação dual com a formulação do Teorema Cinemático da Análise Limite.

Na minimização global, passo 6 do algoritmo 2, a matriz quadrada simétrica do sistema governativo tem dimensões $(1 + 3(D-1)n_p n_E + D(n_E + n_N^B(i)n_B) - n_N^B(i)n_{\Gamma_u}^B)$ e apresenta o seguinte aspeto,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{F}}^T \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{A}_0^{-1} & -\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{F}} & -\hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{k+1} \\ \mathbf{s}^{k+1} \\ \hat{\mathbf{v}}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\mathbf{e}}^k + \rho \mathbf{A}_0^{-1} \bar{\mathbf{s}}^k \\ -\hat{\mathbf{F}}_0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Para reduzir a dimensão do sistema governativo (4.60), procede-se à eliminação da variável \mathbf{s} do sistema, para isso resolve-se a segunda equação em ordem a esta variável, resultando que,

$$\mathbf{s}^{k+1} = \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0 (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}^{k+1} - \hat{\mathbf{e}}^k) + \bar{\mathbf{s}}^k \quad (4.61)$$

re-introduzindo, então, esta equação (4.61) nas restantes duas equações (primeira e terceira equação) do sistema (4.60) resulta no seguinte sistema governativo condensado,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{B}} & -\hat{\mathbf{F}} \\ -\hat{\mathbf{F}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}^{k+1} \\ \alpha^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_0 - \hat{\mathbf{B}}^T (\bar{\mathbf{s}}^k - \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{e}}^k) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

A matriz deste sistema (4.62) pode ser singular, porque $\hat{\mathbf{B}}$ (mais precisamente o bloco \mathbf{N}) pode apresentar dependências. Como se demonstrará na secção 5.3.2, estas dependências surgem porque n_D linhas da matriz \mathbf{N} podem ser obtidas por combinações lineares das restantes linhas, provocando que a matriz do sistema (4.62) deixe de ser quadrada para representar um sistema subdeterminado.

Na minimização local, passo 7 do algoritmo MDAM, resulta no seguinte problema complexo não linear,

$$\min \quad \mathcal{L}_L(\bar{\mathbf{s}}^{k+1}) = -(\bar{\mathbf{s}}^{k+1})^T \underset{TE}{\boldsymbol{\Lambda}} + \frac{\rho}{2} (\bar{\mathbf{s}}^{k+1})^T \mathbf{A}_0^{-1} \bar{\mathbf{s}}^{k+1} \quad (4.63a)$$

$$\text{sujeito a} \quad f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.63b)$$

onde,

$$\underset{TE}{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{\mathbf{e}}^k + \rho \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{s}^{k+1} \quad (4.64)$$

assim, neste caso, a sua génese é conferida apenas pela restrição da condição de cedência (4.63b). A complexidade deste problema pode ser reduzida devido a apresentar as mesmas características que o problema (4.39), assim basta resolver de forma independente para cada elemento i o seguinte sub-problema,

$$\min \quad \mathcal{L}_L(\bar{\mathbf{s}}^{(i)}) = -(\bar{\mathbf{s}}^{(i)})^T \underset{TE}{\boldsymbol{\Lambda}} + \frac{\rho}{2} (\bar{\mathbf{s}}^{(i)})^T \mathbf{A}_0^{-1} \bar{\mathbf{s}}^{(i)} \quad (4.65a)$$

$$\text{sujeito a} \quad f(\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_p^{(i)}\} \quad (4.65b)$$

A fim de simplificar a notação utilizada neste problema (4.65), expressa-se os termos $\bar{\mathbf{s}}^{(i)}$ sem os índices $k+1$. Neste caso, é válida a seguinte transformação de coordenadas,

$$\begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix}^{(i)} = \mathbf{Y}^{(i)} \begin{bmatrix} s_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & s_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_{II} \end{bmatrix}^{(i)} (\mathbf{Y}^{(i)})^T \quad (4.66)$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{Y}^{(i)}$ agrupa nas colunas os vetores próprios normalizados do tensor, $\mathbf{\Lambda}_{TE}$, associados aos seus valores próprios. Como a função objetivo deste problema é diferenciável ($h_{\mathcal{K}^c}(z) = 0$), pode-se determinar o ponto de estacionariedade (4.14), $\bar{\mathbf{s}}_u$, como uma função independente do critério de cedência escolhido, resultando então que,

$$\bar{\mathbf{s}}_u^{k+1} = \mathbf{s}^{k+1} + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0 \mathbf{e}^k \quad (4.67)$$

Posteriormente, para cada critério de cedência analisado, definem-se duas rotinas específicas, que consistem basicamente na definição do domínio da função de cedência e na projeção para a superfície de cedência. Na secção 5.2.2 são descritas detalhadamente as estratégias numéricas de resolução do problema (4.65) para os diferentes critérios de cedência estudados.

Por fim, no cálculo dos resíduos primais, passo 9, e duais, passo 11, do algoritmo MDAM obtém-se as seguintes expressões,

$$\mathbf{r}_p^{k+1} = \mathbf{A}_0^{-1/2} (\mathbf{s}^{k+1} - \bar{\mathbf{s}}^{k+1}) \quad (4.68a)$$

$$\mathbf{r}_d^{k+1} = \rho \mathbf{A}_0^{-1/2} (\bar{\mathbf{s}}^{k+1} - \bar{\mathbf{s}}^k) \quad (4.68b)$$

resultando que a atualização do multiplicador de Lagrange, passo 10, possa ser expressa do seguinte modo,

$$\hat{\mathbf{e}}^{k+1} = \hat{\mathbf{e}}^k + \rho \mathbf{A}_0^{-1} (\mathbf{s}^{k+1} - \bar{\mathbf{s}}^{k+1}) \quad (4.69)$$

4.3.2.1 Domínio (Semi-)Infinito

Quando, por outro lado, se aplica a formulação do Teorema Estático da Análise Limite, apresentada na secção anterior, a um corpo contínuo de domínio (semi-)infinito (figura 4.4), não é possível discretizar todo o domínio. Assim sendo, não é possível garantir fora

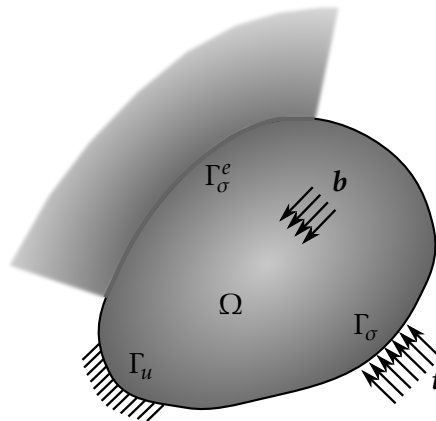


Figura 4.4: Definição do tipo de problema para um domínio (semi-)infinito

da zona discretizada a verificação do Teorema Estático, isto é, não se garante que o campo de tensões ótimo obtido verifique todas as restrições impostas ao problema (2.30). Não se garantindo a verificação do equilíbrio tanto no domínio como nas fronteiras estáticas e

a verificação da função de cedência ao longo de todo o domínio (semi-)infinito do corpo. Em regra, a solução obtida para este campo de tensões parcial sobre-estima a carga de colapso real da estrutura, contudo esta majoração tende a diminuir com o aumento do domínio discretizado o que conduzirá a obtenção de boas estimativas da carga de colapso real. A justificação para este facto deve-se a que o aumento da zona discretizada provoca que a influência das restrições da fronteira vão diminuindo até que deixarão de contar para a solução. Assim, a solução tenderá, com o aumento da zona discretizada para o valor exato correspondente ao meio semi-infinito.

Apesar disso, apenas se consegue obter uma estimativa inferior estrita através da extensão do campo de tensões para o domínio (semi-)infinito de forma a se verificar totalmente as restrições impostas ao problema. Este processo é realizado através da inclusão de elementos de extensão na fronteira estática de extensão (figura 4.4), Γ_σ^e , capazes de garantir que é possível obter um campo de tensões estaticamente admissível.

Esta técnica foi inicialmente implementada por Pastor [115] para o caso bidimensional sendo posteriormente alargada para o caso tridimensional por Lyamin [78]. Esta última formulação apresentava algumas incorreções que foram detetadas e corrigidas por Makrodimopoulos e Martin [87]. No presente trabalho apresenta-se uma técnica derivada destes trabalhos, em que é necessário a definição de D tipos de elementos de extensão para um problema D dimensional. Na tabela 4.5 expõe-se então estes elementos, apresentando igualmente as suas características tanto em termos geométricos como no respetivos campos de aproximação. De seguida apresentam-se as propriedades destes elementos de extensão que permitem verificar todos os requisitos impostos pelo Teorema Estático da Análise Limite num domínio (semi-)infinito.

O elemento 2D do tipo unidirecional como o nome indica apenas permitem estender o campo das tensões numa única direção (tabela 4.5). Pela figura 4.5(a) percebe-se que o afastar para o infinito (∞) do ponto 3 do elemento finito regular i (tabela 4.3) provoca que o segmento de reta (aresta) 1 – 3 comece a ficar paralelo ao segmento de reta 2 – 3 (aresta de extensão), originando que a sua geometria passe a ser um quadrilátero.

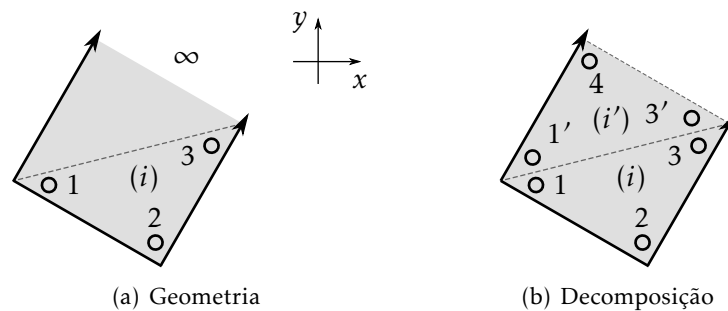

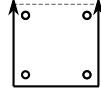
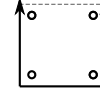
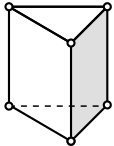
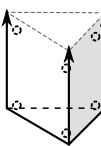


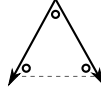
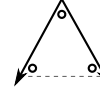
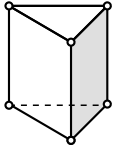
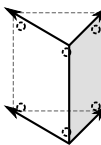
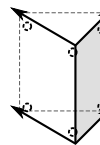
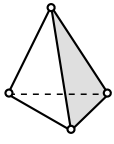
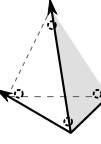
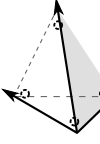


Figura 4.5: Elemento especial 2D do tipo unidirecional

Tabela 4.5: Elementos de extensão para a formulação do Teorema Estático

Tipo de Elemento	Forma	s	\tilde{s}
Unidirecional			
	4 nós	$n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$
			
Bidirecional			
	3 nós	$n_p^{(i)} = 3$	$n_p^{(i)} = 3$
			
Tridirecional			
	4 nós	$n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$

Através deste raciocínio, considera-se que o campo no infinito, é definido pelas propriedades nodais da sua aresta de extensão:

$$x_\infty = x_2 + \xi(x_3 - x_2) = x_2 + \xi dx_{23} \quad (4.70a)$$

$$y_\infty = y_2 + \xi(y_3 - y_2) = y_2 + \xi dy_{23} \quad (4.70b)$$

$$s_\infty = s_2 + \xi(s_3 - s_2) = s_2 + \xi ds_{23} \quad (4.70c)$$

$$\mathbf{t}_{\infty}^{(i)} = \mathbf{t}_{2\infty}^{(i)} + \xi(\mathbf{t}_{32}^{(i)} - \mathbf{t}_{23}^{(i)}) = \mathbf{t}_{2\infty}^{(i)} + \xi d\mathbf{t}_{23}^{(i)} \quad (4.70d)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^+$ corresponde ao parâmetro de profundidade de extensão e $d\mathbf{t}_{jl}$ corresponde ao vetor de variação de um determinado campo entre os nós j - l .

Seguindo o mesmo raciocínio que nos elementos regulares, assume-se uma distribuição linear de tensões dentro de cada elemento de extensão, resulta então que:

$$s_1 = \kappa_1 + \kappa_2 x_1 + \kappa_3 y_1 \quad (4.71a)$$

$$s_2 = \kappa_1 + \kappa_2 x_2 + \kappa_3 y_2 \quad (4.71b)$$

$$s_\infty = \kappa_1 + \kappa_2 x_\infty + \kappa_3 y_\infty \quad (4.71c)$$

relacionando estas equações através das definições (4.70) pode-se reformular a equação (4.71c) como:

$$ds_{23} = \kappa_2 dx_{23} + \kappa_3 dy_{23} \quad (4.72)$$

Esta expressão permite afirmar que o equilíbrio no elemento de extensão é garantido caso se verifique o equilíbrio no elemento finito i e que $d\Box_{14} = d\Box_{23}$. A imposição destas condições pode ser realizada de duas formas distintas. Uma consiste em aplicar o equilíbrio diretamente no elemento quadrilátero, sendo esta desciminada em detalhe no apêndice A.

Outra forma, que corresponde à correntemente utilizada, divide-se o elemento quadrilátero em dois elementos triangulares clássicos (i, i'), sujeitando para isso os elementos resultantes à mesma variação de tensões e impondo adicionalmente que as tensões na aresta comum coincidem, conforme ilustrado na figura 4.5(b). Para além disso, considera-se que este elemento de extensão é definido pelas seguintes propriedades nodais ($s_1, s_2, ds_{23}, ds_{14}$), logo a matriz de equilíbrio é definida da seguinte forma:

$$[-D\phi^{(i)} | \hat{F}^{(i)}] = \begin{bmatrix} -D\phi_1^{(i)} & -(D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)}) & -D\phi_3^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

em vez da corrente definição (4.52).

Aplicando um raciocínio semelhante para os restante elementos de extensão, tabela 4.5, obtêm-se as matrizes de equilíbrio equivalentes no domínio de cada elemento i expressas na tabela 4.6.

A fronteira do elemento 2D do tipo unidirecional, figura 4.5(a), é definida por três arestas ($1 - 2, 2 - \infty, \infty - 1$) sendo que a única diferença em relação ao elemento triangular normal (tabela 4.3), reside nas fronteiras que apresentam um nó de extensão. Considerando uma destas fronteiras ($2 - \infty$), o equilíbrio fica verificado através das seguintes equações,

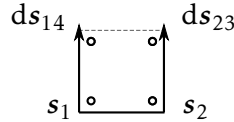
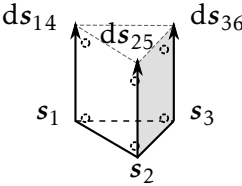
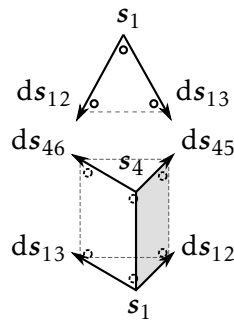
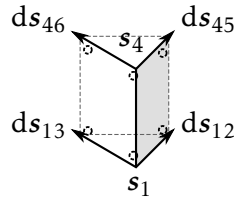
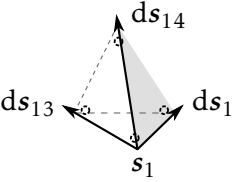
$$\begin{cases} n_{2\infty}^{(i)} s_2 = t_{2\infty}^{(i)} \\ n_{2\infty}^{(i)} s_\infty = t_{\infty 2}^{(i)} \end{cases} \quad (4.74)$$

que através das equações (4.70c) e (4.70d) estas equações podem ser reformuladas em,

$$\begin{cases} n_{2\infty}^{(i)} s_2 = t_{2\infty}^{(i)} \\ n_{2\infty}^{(i)} ds_{23} = dt_{23}^{(i)} \end{cases} \quad (4.75)$$

logo o equilíbrio nas fronteiras do elemento de extensão, independentemente da discretização escolhida (elemento quadrilátero ou dois elementos triangulares), é garantido caso

Tabela 4.6: Elementos de extensão: equilíbrio no domínio

s	$[-D\phi^{(i)} \hat{F}^{(i)}]$
	$\begin{bmatrix} -D\phi_1^{(i)} & -(D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)}) & -D\phi_3^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} (D\phi_1^{(i)} - D\phi_4^{(i)}) & -D\phi_2^{(i)} & D\phi_3^{(i)} & -D\phi_4^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} -(D\phi_1^{(i)} + D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)}) & -D\phi_2^{(i)} & -D\phi_3^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} (D\phi_1^{(i)} - D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)}) & -D\phi_2^{(i)} & D\phi_3^{(i)} & -D\phi_4^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} (D\phi_1^{(i)} - D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)} - D\phi_4^{(i)}) & -D\phi_2^{(i)} & D\phi_3^{(i)} & -D\phi_4^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(i)} \end{bmatrix}$

se verifique o equilíbrio nas fronteiras do respetivo elemento finito. Aplicando um raciocínio semelhante para os restantes elementos de extensão, tabela 4.5, chega-se à conclusão que as condições de equilíbrio nas fronteiras dos elementos finitos normais, equação (4.52), é o mesmo com a pequena alteração que nos nós de extensão a força de superfície externa é substituída pela sua variação ao longo dessa fronteira.

Por fim, a verificação da função de cedência fica confirmada, para o elemento 2D do tipo unidirecional, figura 4.5(a), caso esta seja verificada nos três pontos que constituem o elemento especial de extensão. A justificação para este facto deve-se porque aliado à função de cedência ser convexa assume-se uma distribuição de tensões linear. Assim, por este raciocínio, basta verificar as seguintes inequações:

$$f(s_1) \leq 0 \quad (4.76a)$$

$$f(s_2) \leq 0 \quad (4.76b)$$

$$f(s_\infty) \leq 0 \quad (4.76c)$$

Como as funções de cedência correntemente utilizadas, tabela 2.1, apresentam as seguintes propriedades:

$$f(s) = F(s) + \text{constante} \quad (4.77a)$$

$$F(\xi s) = \xi F(s), \quad \xi \in \mathbb{R}^+ \quad (4.77b)$$

$$F(s_1 + s_2) \leq F(s_1) + F(s_2) \quad (4.77c)$$

Estas propriedades são facilmente demonstradas, contudo a última destas equações (4.77c) apresenta uma maior dificuldade de verificação. Esta equação pode ser verificada com base na definição da derivada:

$$F(s_1 + s_2) - F(s_1) = \int_{s_1}^{s_1+s_2} F'(s) ds = \int_0^{s_2} F'(s + s_1) ds \leq \int_0^{s_2} F'(s) ds = F(s_2) \quad (4.78)$$

porque a função do critério de cedência do material sem o termo constante, $F(s)$, é um monómio de grau menor ou igual a 1, logo a sua derivada no domínio é decrescente ou constante, respetivamente. Com base nas propriedades (4.77) e na expressão (4.70c) a equação (4.76c) pode ser simplificada:

$$f(s_\infty) = F(s_2 + \xi ds_{23}) + \text{constante} \leq f(s_2) + \xi F(ds_{23}) \leq \xi F(ds_{23}) \rightarrow F(ds_{23}) \leq 0 \quad (4.79)$$

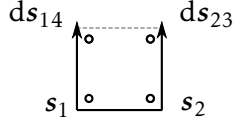
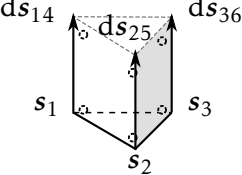
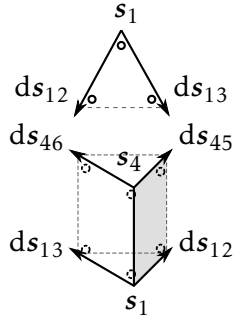
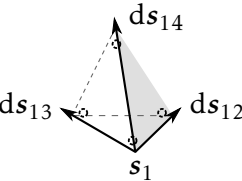
Esta equação origina que a verificação da função de cedência nos elementos de extensão seja diferente do procedimento correntemente utilizado nos elementos finitos normais (tabela 4.3). Assim, para se verificar a função de cedência neste elemento, independentemente da discretização escolhida, para além das equações (4.76a), (4.76b) e (4.79), é necessário adicionar a seguinte equação:

$$F(ds_{14}) \leq 0 \quad (4.80)$$

Para uma melhor compreensão destas restrições nos restantes elementos de extensão (tabela 4.5), apresentam-se na tabela 4.7 as inequações de cedência que são necessárias verificar em cada tipo de elemento, aplicando para isso o mesmo raciocínio que o apresentado anteriormente para o elemento 2D do tipo unidirecional.

A adição destes elementos de extensão (caraterizados anteriormente) à malha regular permite assim a obtenção de um campo de tensões estaticamente admissível para o domínio (semi-)infinito do problema. Tal leva a que a estimativa da carga de colapso real seja um limite inferior estrito. Contudo, para os casos em que a malha regular não cobre totalmente as regiões plásticas, esta estimativa subestima consideravelmente a carga de colapso real. Para contornar este retrocesso e aferir a qualidade da solução é necessário que se estime a carga de colapso duas vezes, uma utilizando apenas elementos regulares e outra adicionando a estes os elementos de extensão. Se estas estimativas diferirem significativamente entre si, então é necessário estender a malha regular de forma a cobrir uma maior percentagem das regiões plastificadas repetindo-se este procedimento até se atingir um erro aceitável entre as duas estimativas.

Tabela 4.7: Elementos de extensão: função de cedência

s	$f(s) \leq 0$
	$f(s_1) \leq 0 \quad ; \quad f(s_2) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{23}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{14}) \leq 0$
	$f(s_1) \leq 0 \quad ; \quad f(s_2) \leq 0 \quad ; \quad f(s_3) \leq 0 \quad ;$ $F(ds_{14}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{25}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{36}) \leq 0$
	$f(s_1) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{12}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{13}) \leq 0$ $f(s_4) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{45}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{46}) \leq 0$
	$f(s_1) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{12}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{13}) \leq 0 \quad ; \quad F(ds_{14}) \leq 0$

Por fim, o mecanismo para gerar as zonas de extensão para o caso bidimensional e tridimensional requer algum cuidado, sendo este procedimento coberto mais à frente na secção 5.4.

4.3.3 Densidade da Matriz do Sistema Governativo

Nesta secção pretende-se obter a densidade da matriz do sistema governativo tanto para o Teorema Cinemático como para o Teorema Estático da Análise Limite, bem como relacioná-los na sua vertente bidimensional e tridimensional. Para além disso, pretende-se relacionar ambas as densidades obtidas pelos diferentes teoremas.

4.3.3.1 Formulação do Teorema Cinemático

A matriz do sistema governativo (4.37) apresenta a seguinte densidade,

$$\Upsilon_{TC} = \frac{\text{número de não zeros}}{\text{número de linhas} \times \text{número de colunas}} = \frac{n_E D^2 \left(n_N^{(i)} \right)^2 + 2(Dn_N - n_{\Gamma_u}^N)}{(Dn_N - n_{\Gamma_u}^N + 1)^2} \quad (4.81)$$

dado que para malhas refinadas se tem que $Dn_N \gg n_{T_u}^N$, a expressão (4.81) pode simplificar-se em:

$$\Upsilon_{TC} \approx \frac{n_E D^2 \left(n_N^{(i)}\right)^2 + 2Dn_N}{(Dn_N + 1)^2} \approx \frac{n_E \left(n_N^{(i)}\right)^2}{n_N^2} \quad (4.82)$$

concluindo-se que a densidade da matriz do sistema governativo é controlada pela densidade da matriz $\rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B}$.

Segundo a fórmula de Euler [125] temos que:

$$2D : \quad n_N + n_E - n_B = 1 \quad (4.83a)$$

$$3D : \quad n_N + n_B - n_E - n_A = 1 \quad (4.83b)$$

onde, para o caso bidimensional (4.83a), n_B corresponde ao número total de fronteiras (arestas) independentes da malha de elementos finitos, por outro lado, para o caso tridimensional (4.83b), n_B e n_A , correspondem respetivamente ao número total de fronteiras (faces) e arestas independentes da malha de elementos finitos.

Adicionalmente para malhas estruturadas quadráticas triangulares e tetraédricas, tem-se que:

$$2D : \quad n_B \approx 3n_E \quad (4.84a)$$

$$3D : \quad \begin{cases} n_B \approx 2n_E \\ n_A \approx \frac{29}{12}n_E \end{cases} \quad (4.84b)$$

logo pela fórmula de Euler (4.83) resulta que:

$$2D : \quad n_N \approx 2n_E \quad (4.85a)$$

$$3D : \quad n_N \approx \frac{17}{12}n_E \quad (4.85b)$$

Substituindo então estes resultados (4.85) na expressão da densidade (4.82) obtém-se para cada um dos elementos quadráticos da tabela 4.1 que:

$$\Upsilon_{TC}^{2D} \approx \frac{9}{n_E} \quad (4.86a)$$

$$\Upsilon_{TC}^{3D} \approx \frac{14400}{289n_E} \approx \frac{49.827}{n_E} \quad (4.86b)$$

o que permite afirmar que a matriz do sistema governativo tridimensional é cerca de 5.5 vezes mais densa por elemento que a referente ao caso bidimensional.

4.3.3.2 Formulação do Teorema Estático

A matriz do sistema governativo (4.62) apresenta a seguinte densidade:

$$\Upsilon_{TE} \approx \frac{\left(n_E + (2D - 1)n_{BI}n_N^{B(i)} + 2n_E n_P^{(i)} D\right) D^2 + 2D(n_E + n_N^{B(i)} n_{BI})}{\left(1 + D(n_E + n_N^{B(i)} n_{BI}) - n_D\right) \left(1 + D(n_E + n_N^{B(i)} n_{BI})\right)} \quad (4.87)$$

Dado que se considerou que estamos perante uma malha refinada, tem-se que $n_B \approx n_{BI}$, originando assim uma distribuição infinita de elementos sem qualquer tipo de restrição. Para além disso, para este tipo de malhas refinadas, o número de dependências que surgem no sistema governativo, ver secção 5.3.2, são muito inferiores à dimensão da própria matriz, pelo que para efeitos do cálculo da densidade, equação (4.87), despreza-se esta grandeza, obtendo-se que:

$$\Upsilon_{TE} \approx \frac{\left(n_E + (2D - 1)n_{BI}n_N^{B(i)} + 2n_E n_P^{(i)}D\right)D^2 + 2D(n_E + n_N^{B(i)}n_{BI})}{\left(1 + D(n_E + n_N^{B(i)}n_{BI})\right)^2} \quad (4.88)$$

Observando o sistema governativo (4.62), percebe-se que a densidade da matriz é controlada pela densidade da matriz $\rho \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B}$ porque nos restantes blocos apenas existe um único zero, logo:

$$\Upsilon_{TE} \approx \frac{n_E(1 + 2n_P^{(i)}D) + (2D - 1)n_{BI}n_N^{B(i)}}{\left(n_E + n_N^{B(i)}n_{BI}\right)^2} \quad (4.89)$$

Adicionalmente para malhas estruturadas lineares triangulares e tetraédricas, tem-se que:

$$2D : \quad n_B \approx \frac{3}{2}n_E \quad (4.90a)$$

$$3D : \quad \begin{cases} n_B \approx 2n_E \\ n_A \approx \frac{29}{24}n_E \end{cases} \quad (4.90b)$$

logo segundo a fórmula de Euler (4.83) resulta que:

$$2D : \quad n_N \approx \frac{n_E}{2} \quad (4.91a)$$

$$3D : \quad n_N \approx \frac{5}{24}n_E \quad (4.91b)$$

Substituindo então os resultados (4.90) e (4.91) na equação (4.89) obtém-se para cada um dos elementos da tabela 4.3 que:

$$\Upsilon_{TE}^{2D} \approx \frac{11}{8n_E} \approx \frac{1.375}{n_E} \quad (4.92a)$$

$$\Upsilon_{TE}^{3D} \approx \frac{55}{49n_E} \approx \frac{1.122}{n_E} \quad (4.92b)$$

o que permite afirmar que a matriz do sistema governativo bidimensional é cerca 1.2 vezes mais densa por elemento que a referente ao caso tridimensional.

Para além disso, confrontando com as densidades obtidas para o Teorema Cinemático equação (4.86), conclui-se que:

$$\Upsilon_{TC}^{2D} \approx 6.545 \times \Upsilon_{TE}^{2D} \quad (4.93a)$$

$$\Upsilon_{TC}^{3D} \approx 44.391 \times \Upsilon_{TE}^{3D} \quad (4.93b)$$

isto é, que a matriz do sistema governativo obtida para o Teorema Estático é mais esparsa que a matriz obtida para o Teorema Cinemático.

4.4 Problema Dual

Nesta secção, pretende-se demonstrar que a formulação numérica do Teorema Cinemático é a dual da formulação numérica do Teorema Estático da Análise Limite. Para isso podem seguir-se dois caminhos distintos. No primeiro caso, partindo do Teorema Cinemático primal pode deduzir-se a sua formulação dual, que corresponde ao Teorema Estático. No segundo caso, partindo do Teorema Estático pode deduzir-se a sua formulação dual, que corresponde ao Teorema Cinemático.

4.4.1 Formulação do Teorema Cinemático

Para a formulação do Teorema Cinemático da Análise Limite, considera-se à mesma que o campo das velocidades e da taxa de deformação plástica são discretizados pelas aproximações (4.30). Tendo em consideração as definições (4.34) e (4.35), pode-se definir o funcional Lagrangeano do problema (2.33) na seguinte forma compacta:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{e}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\alpha}, \boldsymbol{\nu}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}_j) d\Omega - \mathbf{F}_0^T \mathbf{v} + \hat{\alpha} (1 - \mathbf{F}^T \mathbf{v}) + \hat{\mathbf{s}}^T (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{e}) - \sum_{j=1}^{n_p} \nu_j \mathcal{C}_c(\mathbf{e}_j) \quad (4.94)$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\alpha}$ e $\boldsymbol{\nu}$ são os multiplicadores de Lagrange. Aplicando agora a dualidade (secção 2.9.4) ao Lagrangeano a discretização do problema original (2.33) pode ser obtida através do seguinte problema de otimização equivalente:

$$\min_{\mathbf{v}, \mathbf{e}} \max_{\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\nu}} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{e}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\alpha}, \boldsymbol{\nu}) \quad (4.95)$$

Em seguida, recorrendo à dualidade max-min (2.39), impõe-se as condições de estacionariedade para as variáveis primais, \mathbf{v} e \mathbf{e} , formulando assim o problema de maximização dual:

$$\max \quad \hat{\alpha} - \sum_{j=1}^{n_p} \nu_j \mathcal{C}_c(\mathbf{e}_j) \quad (4.96a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{s}} - \hat{\alpha} \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \quad (4.96b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{e}} = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{D}(\mathbf{e}_j)}{\partial \mathbf{e}_j} - \hat{\mathbf{s}}_j - \nu_j \frac{\partial \mathcal{C}_c(\mathbf{e}_j)}{\partial \mathbf{e}_j} = \mathbf{0}, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.96c)$$

$$\boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{0} \quad (4.96d)$$

Como este problema apresenta uma dualidade robusta, equação (2.41), permite afirmar que a solução ótima do problema discreto primal e dual coincidem e que se verificam as condições KKT, equação (2.42). Assim, é possível remover o último termo da função objetivo, equação (4.96a), dado que na solução ótima se verifica a seguinte igualdade:

$$\nu_j \mathcal{C}_c(\mathbf{e}_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.97)$$

Por fim, removem-se as variáveis \mathbf{e} e \mathbf{v} do problema, aplicando para isso, a integração em ordem a \mathbf{e}_j à restrição (4.96c), obtendo-se:

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_j^T \hat{\mathbf{s}}_j - \nu_j \mathcal{C}_c(\mathbf{e}_j) = \text{constante} \quad (4.98)$$

Introduzindo nesta equação, a expressão (4.97) obtém-se que:

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j^T \hat{\mathbf{s}}_j + \text{constante} \quad (4.99)$$

Logo, para se verificar a equação da dissipação plástica:

$$\mathcal{D}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j^T \hat{\mathbf{s}}_j, f(\hat{\mathbf{s}}_j) \leq 0 \quad (4.100)$$

a *constante* assume o valor nulo sendo necessário apenas verificar que:

$$f(\hat{\mathbf{s}}_j) \leq 0 \quad (4.101)$$

Combinando as equações (4.96) e (4.97) com a simplificação apresentada para a restrição (4.96c) obtém a configuração final da formulação dual do Teorema Cinemático:

$$\max \quad \hat{\alpha} \quad (4.102a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{s}} - \hat{\alpha} \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0 \quad (4.102b)$$

$$f(\hat{\mathbf{s}}_j) \leq 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.102c)$$

que através de um simples rearranjo se pode formular da seguinte forma:

$$\max \quad \hat{\alpha} \quad (4.103a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{s}} - \hat{\alpha} \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0 \quad (4.103b)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_j = \hat{\mathbf{s}}_j, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.103c)$$

$$f(\hat{\mathbf{s}}_j) \leq 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.103d)$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$ armazena as componentes do campo das tensões nos pontos analisados.

Como se observa facilmente, a forma do problema dual resultante (4.103) corresponde a um problema do Teorema Estático (4.47), logo são válidas todas as considerações feitas na secção 4.3.2 sobre a sua formulação segundo um problema MDAM, fazendo para isso a respetiva substituição pelos operadores duais do Teorema Cinemático da Análise Limite.

Contudo, para confirmar o significado físico assumido para os multiplicadores de Lagrange $\hat{\alpha}$ e $\hat{\mathbf{s}}$, presentes na tabela 4.2, é necessário proceder para esta última grandeza ao seguinte escalamento,




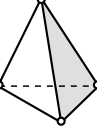
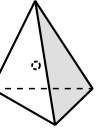
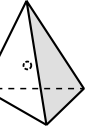



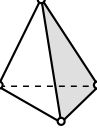
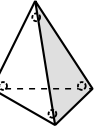
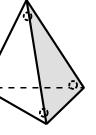
$$\hat{\mathbf{s}}^{(i)} \hookrightarrow \frac{\hat{\mathbf{s}}^{(i)}}{\int_{\Omega^{(i)}} d\Omega} \quad (4.104)$$

dado que o vetor das forças nodais constantes do Teorema Cinemático (4.35b) é calculado de uma forma total enquanto o vetor das forças nodais constantes do Teorema Estático

(4.51b) é calculado de uma forma pontual. Assim segundo a equação (4.104) procede-se à transformação da grandeza total na respetiva grandeza $\hat{\hat{s}}$ pontual.

As novas grandezas primais $\hat{\alpha}$, $\hat{\hat{s}}$ e \hat{s} (utilizando o mesmo escalamento) são interpretadas respetivamente como o multiplicador de carga estático associado com o problema do Teorema Cinemático e as tensões pontuais locais e globais de um campo estático virtual associado com o problema do Teorema Cinemático. Conclui-se então que esta discretização resulta num campo de tensões incongruente e para além disso não se garante que se obtenha uma solução estaticamente admissível. Na tabela 4.8 expõem-se os graus de liberdade nodais dos dois campos de aproximação das tensões. Como se pode observar, o tipo de variação (constante ou linear) do campo das tensões é o mesmo que o tipo de variação do campo da taxa das deformações plásticas considerado.

Tabela 4.8: Elementos finitos para a formulação dual do Teorema Cinemático

Tipo de Elemento	Forma	\hat{s}	$\hat{\hat{s}}$
Linear (isoparamétrico)			
	3 nós $n_p^{(i)} = 1$	$n_p^{(i)} = 1$	$n_p^{(i)} = 1$
Quadrático (subparamétrico)			
	4 nós $n_p^{(i)} = 1$	$n_p^{(i)} = 1$	$n_p^{(i)} = 1$
Quadrático (subparamétrico)			
	3 nós $n_p^{(i)} = 3$	$n_p^{(i)} = 3$	$n_p^{(i)} = 3$
Quadrático (subparamétrico)			
	4 nós $n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$	$n_p^{(i)} = 4$

Por fim, menciona-se que o campo de tensões do Teorema Cinemático apresenta a mesma expressão dimensional que o campo de tensões do Teorema Estático. Por isso, quando no Teorema Cinemático da Análise Limite se discretizar utilizando elementos finitos do tipo lineares (isoparamétricos) resulta que a dimensão do tensor das tensões seja $D + 1$, inferior à dimensão do tensor das tensões do Teorema Estático.

4.4.2 Formulação do Teorema Estático

Por outro lado, para a formulação do Teorema Estático da Análise Limite, considera-se de igual forma que o campo das tensões é discretizado independente e simultaneamente pelas aproximações (4.46). Tendo em consideração as definições (4.50) e (4.51), pode-se definir o funcional Lagrangeano do problema (2.30) na seguinte forma compacta:

$$\mathcal{L}(\alpha, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nu}) = \alpha + \hat{\mathbf{v}}^T (\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{s} - \alpha \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{F}}_0) - \sum_{j=1}^{n_p} \nu_j f(s_j) \quad (4.105)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}$ e $\boldsymbol{\nu}$ são os multiplicadores de Lagrange. Considera-se que o vetor $\hat{\mathbf{v}}$ é dividido em dois blocos:

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_\Omega \\ \hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

sendo $\hat{\mathbf{v}}_\Omega$ a componente relacionada com as restrições de equilíbrio no domínio do corpo (2.30c), enquanto que $\hat{\mathbf{v}}_\Gamma$ a componente que afeta a restrição de equilíbrio nas fronteiras exteriores (2.30d) e internas (2.31). De seguida, aplica-se a dualidade (secção 2.9.4) ao Lagrangeano, o que permite que a discretização do problema original (2.30) possa ser obtida através do seguinte problema de otimização equivalente:

$$\max_{\alpha, \mathbf{s}} \min_{\hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nu}} \mathcal{L}(\alpha, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nu}) \quad (4.107)$$

Posteriormente, recorrendo à dualidade min-max (2.39), impõe-se as condições de estacionariedade para as variáveis primais, α e \mathbf{s} , formulando assim o problema de minimização dual:

$$\min \quad \mathbf{s}^T (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{F}}_0^T \hat{\mathbf{v}} - \sum_{j=1}^{n_p} \nu_j f(s_j) \quad (4.108a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{v}} = 1 \quad (4.108b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} \Rightarrow \nu_j \frac{\partial f(s_j)}{\partial s_j} = (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}})_j, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.108c)$$

$$\boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{0} \quad (4.108d)$$

Como este problema apresenta uma dualidade robusta (2.41) a solução ótima do problema discreto primal e dual coincidem e verificam-se as condições KKT (2.42). Assim, é possível remover o último termo da função objetivo (4.108a), dado que na solução ótima se verifica a seguinte igualdade,

$$\nu_j f(s_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.109)$$

Por fim removem-se as variáveis \mathbf{s} e $\boldsymbol{\nu}$ do problema, através da definição da taxa das deformações plásticas da teoria da plasticidade (2.12), introduzindo para isso uma nova

variável $\hat{\mathbf{e}}$, que armazena as componentes do campo da taxa das deformações plásticas nos pontos analisados:

$$\hat{\mathbf{e}}_j = \nu_j \frac{\partial f(\mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{s}_j} \quad (4.110)$$

permitindo de igual forma a verificação da equação da dissipação plástica:

$$\mathbf{s}_j^T \hat{\mathbf{e}}_j = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{e}}_j), \hat{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{C}_c \quad (4.111)$$

Combinando as equações (4.108), (4.109), (4.110) e (4.111) obtém-se a configuração final da formulação dual do Teorema Estático:

$$\min \sum_{j=1}^{n_p} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{e}}_j) - \hat{\mathbf{F}}_0^T \hat{\mathbf{v}} \quad (4.112a)$$

$$\text{sujeito a } \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{v}} = 1 \quad (4.112b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_j = (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}})_j, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.112c)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{C}_c, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.112d)$$

Como se observa facilmente, a forma do problema dual (4.112) corresponde a um problema do Teorema Cinemático (4.31), logo são válidas todas as considerações feitas na secção 4.3.1 sobre a sua formulação segundo um problema MDAM, fazendo para isso a respetiva substituição pelos operadores duais do Teorema Estático da Análise Limite.

Contudo, para confirmar o significado físico assumido para os multiplicadores de Lagrange $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{e}}$, presentes na tabela 4.4, é necessário proceder aos seguintes escalamentos:

$$\hat{\mathbf{v}}^{(i)} \hookrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mathbf{v}}_{\Omega}^{(i)}}{\int_{\Omega^{(i)}} d\Omega} \\ \frac{\hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_{\sigma}}^{(i)}}{\int_{\Gamma_{\sigma}^{(i)}} d\Gamma_{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (4.113a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^{(i)} \hookrightarrow \frac{\hat{\mathbf{e}}^{(i)}}{\int_{\Omega^{(i)}} d\Omega} \quad (4.113b)$$




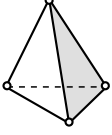
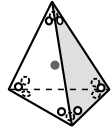
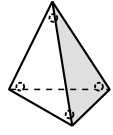
A primeira equação (4.113a) deve-se ao facto do vetor das forças nodais do Teorema Estático (4.51) ser calculado de uma forma pontual enquanto o vetor das forças nodais do Teorema Cinemático (4.35) ser calculado de uma forma total. Por outro lado, a segunda equação (4.113b) surge para que o primeiro termo da função objetivo do problema do Teorema Estático (4.112a) corresponda à potência plástica total dissipada existente no problema do Teorema Cinemático (4.31). Assim segundo as equações (4.113) procede-se à transformação das grandezas totais nas respetivas grandezas pontuais.

Estas novas grandezas correspondem às variáveis primais que são interpretadas respetivamente como as velocidades nodais e como as taxas de deformação plásticas de um

campo cinemático virtual associado com o problema do Teorema Estático. Conclui-se então que esta discretização resulta num campo de velocidades descontínuo, devido ao aspeto das velocidades serem propriedades locais de cada elemento, e para além disso não se garante que se atinja uma solução cinematicamente admissível.

Na tabela 4.9 expõem-se os graus de liberdade nodais para a aproximação do campo das velocidades e para a taxa das deformações plásticas. Como se pode observar, a variação linear do campo das tensões origina uma variação linear do campo da taxa das deformações plásticas associado a uma variação linear do campo das velocidades ao longo de cada fronteira do elemento (aresta para o caso bidimensional e face para o caso tridimensional).

Tabela 4.9: Elementos finitos para a formulação dual do Teorema Estático

Tipo de Elemento	Forma	\hat{v}	\hat{e}
Linear (isoparmétrico)			
	3 nós	$n_N^{(i)} = 7$	$n_p^{(i)} = 3$
			
	4 nós	$n_N^{(i)} = 13$	$n_p^{(i)} = 4$

Legenda \hat{v} : $\circ - \hat{v}_{\Gamma_\sigma}$ ou e ; $\bullet - \hat{v}_\Omega$

Constata-se igualmente que o campo de deformações do Teorema Estático apresenta a mesma expressão dimensional que o campo de deformações do Teorema Cinemático. Por outro lado, o campo das velocidades obtido pela formulação dual (dimensão q da tabela 4.4) não apresenta a mesma expressão dimensional que o campo das velocidades do Teorema Cinemático (dimensão n da tabela 4.2).

De facto, tendo em conta que para malhas refinadas o número de componentes bloqueadas $(n_N^{B(i)} n_{\Gamma_u}^B, n_{\Gamma_u}^N)$ é pouco significativo quando comparados com as restantes componentes e que considerando válidas as equações para malhas estruturadas lineares (4.85) para o Teorema Estático e quadráticas (4.90) para o Teorema Cinemático tem-se que o vetor das velocidades obtidos pelo dual do Teorema Estático da Análise Limite é cerca de duas (2D), a cinco (3D) vezes, superior em termos dimensionais que o correspondente ao vetor obtido pelo Teorema Cinemático.

Por fim, descreve-se o campo das velocidades na sua vertente dual (tabela 4.9). Para o caso bidimensional, este vetor é discretizado para cada elemento por dois nós em cada aresta e por um nó interno. Por outro lado, para o caso tridimensional, o vetor das velocidades é discretizado para cada elemento por três nós por cada face e por um nó interno.

Devido à existência de dois (2D) ou três (3D) nós distintos por cada vértice é possível a existência de descontinuidades no campo das velocidades. Estas descontinuidades não são inconciliáveis com a teoria da plasticidade [131, 77], contudo neste caso não são compatíveis com as aproximações consideradas para a taxa das deformações plásticas.

Adicionalmente, seguindo o procedimento usualmente utilizado, considera-se que o nó interno existente por elemento discretizado define o deslocamento no centroide do elemento finito.

4.4.2.1 Domínio (Semi-)Infinito

Quando se pretende aplicar a formulação dual do Teorema Estático da Análise Limite, apresentado na secção anterior, a um corpo contínuo de domínio (semi-)infinito é necessário adicionar à malha regular os denominados elementos de extensão (ver secção 4.3.2.1). Na tabela 4.10 expõem-se os graus de liberdade nodais para a aproximação do campo das velocidades e para a taxa das deformações plásticas referentes aos elementos de extensão duais.

Como nos elementos regulares, o campo de deformação do Teorema Estático para os elementos de extensão apresenta a mesma distribuição nodal que o campo obtido pelo campo de tensões, logo apresenta as mesmas propriedades nodais de s (tabela 4.6 ou 4.7). Para o campo das velocidades é necessário uma descrição mais detalhada para se compreender corretamente a representação gráfica presente na tabela 4.10.

Nos elementos de extensão a componente \hat{v}_Ω que define o multiplicador de Lagrange \hat{v} , equação (4.106), é definida por um bloco extra:


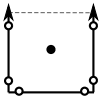
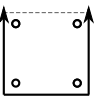
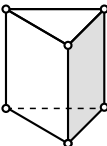
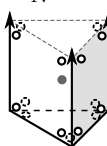
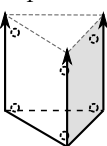

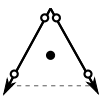
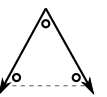
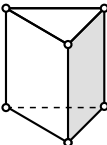
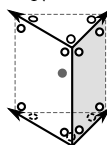
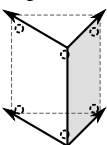
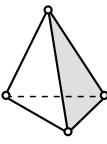
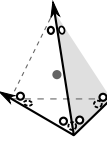
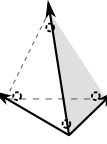
$$\hat{v}_\Omega \hookrightarrow \begin{bmatrix} \hat{v}_\Omega \\ \hat{v}_d \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

sendo \hat{v}_d a componente relacionada com as restrições extra de equilíbrio dos elementos de extensão (tabela 4.6). Esta componente adicional não foi representada na tabela 4.10 dado ainda não se ter compreendido o significado físico assumido por estes multiplicadores de Lagrange.

Assim, no caso bidimensional, os elementos de extensão são discretizados por um nó interno e por dois nós em cada aresta regular e de extensão (aresta que faz fronteira com a malha regular e aresta que faz fronteira com outros elementos de extensão, respetivamente), onde, no último caso, o nó de extensão apresenta as propriedades de variação do campo das velocidades ($d\hat{v}$) na direção dessa aresta.

Por outro lado, para o caso tridimensional, os elementos de extensão são discretizados por um nó interno, por três nós em cada face regular e por três ou quatro nós em cada face de extensão consoante se estenda um ponto ou uma aresta. As faces de extensão apresentam ambas dois nós de extensão, sendo estes pontos caracterizados pelas propriedades de variação do campo das velocidades ($d\hat{v}$) na direção de cada uma das arestas de extensão que definem o plano.

Tabela 4.10: Elementos de extensão para a formulação dual do Teorema Estático

Tipo de Elemento	Forma	\hat{v}	\hat{e}
Unidirecional			
	4 nós	$n_N^{(i)} = 7$	$n_P^{(i)} = 4$
			
	6 nós	$n_N^{(i)} = 16$	$n_P^{(i)} = 6$
Bidirecional			
	3 nós	$n_N^{(i)} = 5$	$n_P^{(i)} = 3$
			
	6 nós	$n_N^{(i)} = 15$	$n_P^{(i)} = 6$
Tridirecional			
	4 nós	$n_N^{(i)} = 10$	$n_P^{(i)} = 4$

Legenda \hat{v} : $\circ - \hat{v}_{\Gamma_o}$ ou e ; $\bullet - \hat{v}_{\Omega}$

Por fim, menciona-se que continua a ser igualmente possível a existência de descon-
tinuidades do campo das velocidades e que se mantêm a mesma representação referente
ao nó interno (ver secção 4.4.2).

4.5 Semelhança das Formulações

Nesta secção pretende-se confirmar a semelhança de cada iteração do Método de Direção Alternada de Multiplicadores em relação às formulações primais e duais. Como se viu anteriormente, o Teorema Estático pode ser resolvido através da sua vertente dual que corresponde a um problema do Teorema Cinemático e vice-versa. Assim através destas duas formulações (primais e duais) demonstra-se a sua relação de igualdade nas diversas fases que definem o Método de Direção Alternada de Multiplicadores: minimização global, minimização local, atualização do multiplicador de Lagrange e cálculo dos resíduos.

4.5.1 Minimização Global

Na primeira fase do Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM) a semelhança fica facilmente patente pela comparação do sistema governativo do Teorema Estático (4.62) com o sistema governativo do Teorema Cinemático (4.37) definido através dos parâmetros duais. De facto, percebe-se que a contribuição do parâmetro de penalidade, ρ , é a única diferença entre ambos os sistemas governativos, mais concretamente o parâmetro de penalidade primal é o inverso do parâmetro de penalidade dual.

4.5.2 Minimização Local

Na segunda fase do Método de Direção Alternada de Multiplicadores esta equivalência não é tão evidente, mas mantém-se uma realidade. Esta demonstração começa pela aplicação do Método do Multiplicadores de Lagrange ao problema de minimização local obtido para o Teorema Estático, (4.63) com (4.64), obtendo-se o seguinte problema equivalente de ponto de sela:

$$\max_{\mathbf{v}} \min_{\bar{\mathbf{s}}^{k+1}} \mathcal{L}_L(\mathbf{s}^{k+1}) + \sum_{j=1}^{n_p} v_j f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}) \quad (4.115)$$

onde as condições de KKT (2.42) deste problema são definidas pelas seguintes restrições:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{s}}^{k+1}} \mathcal{L}_L(\bar{\mathbf{s}}^{k+1}) = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}^k + \rho \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{s}^{k+1} - \bar{\mathbf{s}}^{k+1}) = \frac{\partial(\sum_{j=1}^{n_p} v_j f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}))}{\partial \bar{\mathbf{s}}^{k+1}} \quad (4.116a)$$

$$f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}) \leq 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.116b)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (4.116c)$$

$$v_j f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.116d)$$

Na equação onde se impõe a condição de estacionariedade (4.116a), o termo do lado direito corresponde, como se viu na secção 4.4.2, ao vetor das componentes da deformação plástica associada com o vetor de tensão $\bar{\mathbf{s}}^{k+1}$. Introduzindo nesta equação, a definição (4.69) que se assume como válida, conclui-se então que esta grandeza corresponde de facto a:

$$\dot{\mathbf{e}}^{k+1} = \frac{\partial(\sum_{j=1}^{n_p} v_j f(\bar{\mathbf{s}}_j^{k+1}))}{\partial \bar{\mathbf{s}}^{k+1}} \quad (4.117)$$

e verifica-se igualmente que:

$$(\bar{\mathbf{s}}^{k+1})^T \dot{\mathbf{e}}^{k+1} = \sum_{j=1}^{n_p} \mathcal{D}(\dot{\mathbf{e}}_j^{k+1}), \dot{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{C}_c \quad (4.118)$$

Adicionalmente, introduzindo a equação (4.69) na equação (4.64), obtém-se:

$$\mathbf{\Lambda}_{TE} = \dot{\mathbf{e}}^{k+1} + \rho \mathbf{A}_0^{-1} \bar{\mathbf{s}}^{k+1} \quad (4.119)$$

Logo, considerando as equações (4.119) e (4.118), pode-se re-escrever a função objetivo \mathcal{L}_L presente no problema (4.63) como:

$$\mathcal{L}_L(\bar{\mathbf{s}}^{k+1}, \hat{\mathbf{e}}^{k+1}) = - \sum_{j=1}^{n_p} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{e}}_j^{k+1}) - \frac{\rho}{2} (\bar{\mathbf{s}}^{k+1})^T \mathbf{A}_0^{-1} \bar{\mathbf{s}}^{k+1} \quad (4.120)$$

Finalmente, através da dualidade min-max, reformula-se o problema (4.115) como um problema de maximização local, considerando para isso as equações (4.61), (4.116), (4.117) e (4.120), obtendo-se:

$$\max_{\hat{\mathbf{e}}^{k+1}} - \left(\sum_{j=1}^{n_p} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{e}}_j^{k+1}) - (\hat{\mathbf{e}}^{k+1})^T \hat{\mathbf{\Lambda}}_{TC} + \frac{1}{2\rho} (\hat{\mathbf{e}}^{k+1})^T \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{e}}^{k+1} \right) \quad (4.121a)$$

$$\text{sujeito a } \hat{\mathbf{e}}_j^{k+1} \in \mathcal{C}_c, \forall j \in \{1, \dots, n_p\} \quad (4.121b)$$

onde o vetor de transformação linear dual, $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{TC}$, é definido por:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_{TC} = \bar{\mathbf{s}}^k + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}^{k+1} \quad (4.122)$$

sendo desprezados os termos que não dependem de $\hat{\mathbf{e}}^{k+1}$, dado se assumirem como constantes nesta minimização local.

Comparando-se com o problema de minimização local obtido para o Teorema Cinemático (4.39) definido através dos parâmetros duais, observa-se como na secção anterior, secção 4.5.1, que a contribuição do parâmetro de penalidade, ρ , é a única diferença entre ambos os problemas de minimização local. Conclui-se assim que, os problemas de minimização local das formulações primais e duais são de facto equivalentes.

4.5.3 Atualização do Multiplicador de Lagrange

Na terceira fase do Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM) a semelhança entre ambas as formulações fica demonstrada através do seguinte raciocínio. Partindo da fórmula de atualizar a variável dual para o Teorema Estático, $\hat{\mathbf{e}}$, que corresponde à expressão de atualização incremental (4.69), relaciona-se com a equação (4.61), obtendo-se assim a seguinte fórmula de atualização alternativa,

$$\hat{\mathbf{e}}^{k+1} = \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}^{k+1} + \rho \mathbf{A}_0^{-1} (\bar{\mathbf{s}}^k - \bar{\mathbf{s}}^{k+1}) \quad (4.123)$$

Isolando agora a variável $\bar{\mathbf{s}}^{k+1}$, obtém-se que:

$$\bar{\mathbf{s}}^{k+1} = \bar{\mathbf{s}}^k + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0 (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}^{k+1} - \hat{\mathbf{e}}^{k+1}) \quad (4.124)$$

Comparando esta última expressão com a equação de atualização da variável dual, $\hat{\mathbf{s}}$, definida em relação aos parâmetros duais do Teorema Cinemático, equação (4.45), conclui-se novamente que o processo de atualização do multiplicador de Lagrange das formulações primais e duais são equivalentes.

4.5.4 Cálculo dos Resíduos

Por fim, para terminar a equivalência de cada iteração do Método de Direção Alternada de Multiplicadores em relação às formulações primais e duais, fica a faltar o cálculo dos resíduos primais e duais que afetam tanto o critério de paragem (secção 4.2.4), como o processo de variação do parâmetro de penalidade (secção 4.2.5.2). Os resíduos referentes à formulação primal do Teorema Estático da Análise Limite são obtidos pelas equações (4.68). Substituindo então no resíduo primal (4.68a) a equação (4.69) e no resíduo dual (4.68b) a equação (4.124), obtêm-se:

$$\mathbf{r}_p^{k+1} = \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_0^{1/2} (\hat{\mathbf{e}}^{k+1} - \hat{\mathbf{e}}^k) = \hat{\mathbf{r}}_d^{k+1} \quad (4.125a)$$

$$\mathbf{r}_d^{k+1} = \mathbf{A}_0^{1/2} (\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}}^{k+1} - \hat{\mathbf{e}}^{k+1}) = \hat{\mathbf{r}}_p^{k+1} \quad (4.125b)$$

Comparando estas expressões (4.125) com as equações dos resíduos definidos em relação aos parâmetros duais do Teorema Cinemático (4.44), conclui-se que são equivalentes com a pequena alteração da sigla p com a sigla d porque o dual do resíduo dual corresponde ao resíduo primal.

Conclui-se então que a única diferença entre o Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM) primal e dual é o parâmetro de penalidade. De facto, o parâmetro de penalidade primal é o inverso do parâmetro de penalidade dual.

Capítulo 5

Implementação Numérica

5.1 Introdução

As formulações primais e duais de elementos finitos dos Teoremas Cinemático e Estático da Análise Limite, descritas em detalhe no capítulo 4, permitiram a criação de um algoritmo de resolução comum. Este algoritmo de resolução de problemas de Análise Limite, que corresponde a uma evolução da ferramenta numérica SUBLIM3D resultante dos trabalhos de investigação reportados em [153, 151, 8], foi inserido como um módulo da nova ferramenta numérica, intitulada de *mechpy*. O código *mechpy*, é uma plataforma desenvolvida no DEC da FCT/UNL, utilizando a linguagem *Python*, concebida para o desenvolvimento de formulações de elementos finitos não convencionais.

Neste capítulo, pretende-se apresentar em detalhe os principais aspetos da implementação numérica do algoritmo proposto. Delineando-se inicialmente as estratégias adotadas em cada uma das fases do Método de Direção Alternada de Multiplicadores, dando particular enfoque, às estratégias de minimização global e local, cujo peso computacional condiciona decisivamente o desempenho, no que respeita ao tempo de cálculo.

Analisando atentamente, o processo iterativo do algoritmo MDAM percebe-se que este apresenta uma evidente adequabilidade para explorar o paradigma de processamento paralelo. Com base nesta enorme vantagem, descrevem-se as modificações necessárias ao algoritmo sequencial que o permitem converter num algoritmo paralelo.

Adicionalmente, percebe-se pela literatura existente [87, 106], que no Teorema Estático da Análise Limite o sistema governativo pode apresentar alguns problemas na sua estrutura. Apenas os problemas principais são descritos neste capítulo, definindo em primeiro lugar, a sua origem e em segundo lugar, o modo de os solucionar.

Por fim, para finalizar a descrição do algoritmo proposto, que permite a obtenção de estimativas estritamente superiores pela aplicação do Teorema Cinemático e de estimativas estritamente inferiores pela aplicação do Teorema Estático é necessário explicar, para este último caso, o processo de geração bidimensional e tridimensional dos elementos de extensão que permitem simular o domínio (semi-)infinito.

5.2 Método de Direção Alternada de Multiplicadores

Para uma melhor compreensão das estratégias de implementação do algoritmo MDAM dividiu-se a explicação nas seguintes etapas: minimização global, minimização local, atualização do multiplicador de Lagrange, critério de paragem, alterações propostas à forma original do algoritmo (extensões da formulação clássica) e por fim paralelização algorítmica.

5.2.1 Minimização global

A minimização global resulta na resolução de um sistema de equações lineares (4.37) ou (4.62). Para permitir que o sistema governativo não dependa do parâmetro de penalidade, ρ , dado que este pode sofrer alterações ao longo do processo iterativo (secção 4.2.5.2), procede-se a manipulações algébricas simples que permitem obter o seguinte sistema de equações equivalente,

$$\begin{bmatrix} B^T A_0 B & -F \\ -F^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho v^{k+1} \\ \hat{a}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 - B^T (\hat{s}^k - \rho A_0 e^k) \\ -\rho \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

através da abstração da relação do parâmetro de penalidade primal com o correspondente dual.

Para resolver este sistema escolheu-se um método direto, em detrimento de um método indireto/iterativo. Esta opção deve-se ao facto de ser possível manter o sistema governativo inalterado durante todo o processo iterativo. Mais concretamente optou-se pela resolução deste sistema linear recorrendo à biblioteca numérica *MUMPS* [4] que basicamente utiliza a eliminação de Gauss. Assim, após a realização desta eliminação, basta em cada iteração proceder à sua reutilização dado que apenas o termo independente varia. Para se obter um melhor comportamento em termos de eficiência numérica compilou-se localmente a ferramenta numérica *MUMPS* utilizando para isso rotinas otimizadas da biblioteca numérica *ATLAS* [157], que corresponde à implementação eficiente da biblioteca numérica *BLAS* [17]¹ e de algumas operações da biblioteca numérica *LAPACK* [7]².

Como se pretende com este trabalho a obtenção de estimativas de cargas de colapso de elevada precisão, recorre-se usualmente para os problemas estudados a um número elevado de graus de liberdade, o que provoca que se tenha de lidar com matrizes de grandes dimensões. Esta consequência, aliada ao facto do espaço de memória ser um recurso limitado, torna-se importante a escolha de uma técnica de armazenamento da matriz do sistema governativo. Esta técnica deve ser eficiente, tirando partido da simetria e da esparsidade (elevado número de termos nulos) da matriz, sendo mais evidente no caso do Teorema estático (secção 4.3).

¹A biblioteca numérica *BLAS* fornece rotinas que permitem realizar operações básicas vetoriais e matriciais.

²A biblioteca numérica *LAPACK* fornece rotinas para resolver sistemas de equações lineares, problemas de valores próprios e obtenção da matriz de fatorização associada.

Assim sendo, optou-se que os sistemas fossem armazenados numa forma compacta denominada *coordinate format*, não só porque tira partido das características apresentadas anteriormente, como corresponde ao formato de entrada da matriz na ferramenta numérica *MUMPS* (como a matriz do sistema governativo é simétrica apenas se armazena as componentes da parte triangular superior incluindo a diagonal). Este formato permite construir a matriz através de três vetores: dois vetores de números inteiros que armazenam o índice das linhas e das colunas e um vetor de números reais que armazena as entradas da matriz não nulas.

Por fim, refere-se que o multiplicador de carga de colapso, α , é obtido diretamente através do sistema linear (5.1), isto é, corresponde a uma estimativa baseada nos campos locais. Contudo, também se poderia estimar o multiplicador de carga de colapso baseando-se nos campos globais, bastando para isso obter o valor da função objetivo (4.31a) para o Teorema Cinemático e (4.112a) para o Teorema Estático.

5.2.2 Minimização local

A minimização local corresponde à resolução independente de um problema não linear em cada elemento i da malha de elementos finitos, problema (4.41) para o Teorema Cinemático ou problema (4.65) para o Teorema Estático. Pela observação atenta destes problemas de minimização, percebe-se que as variáveis associadas a cada ponto do elemento finito se encontram desacopladas, sendo assim, pode-se decompor este problema na soma das contribuições de cada ponto do elemento, através da resolução independente deste problema.

Por outras palavras, para se verificar a minimização local no elemento basta, apenas, proceder à minimização local nos pontos respetivos do elemento. Esta afirmação é válida porque o campo de aproximação local apresenta uma distribuição linear ou constante (nos elementos isoparamétricos da formulação do Teorema Cinemático), associado ao facto, de o domínio deste campo ser um espaço convexo, logo, qualquer combinação linear do campo destes pontos, está também necessariamente contida nesse mesmo espaço.

Para resolver estes problemas de minimização recorreu-se ao desenvolvimento de expressões analíticas, em detrimento da utilização de algoritmos iterativos, dado corresponder à forma de garantir uma melhor eficiência numérica em termos de tempo. Como os problemas resultantes diferem, não só, consoante o teorema adotado, mas também, pelo critério escolhido, em vez de se adotar um algoritmo genérico que apresentaria um desempenho modesto para a generalidade dos materiais, optou-se pela definição específica de funções para cada caso, de forma a tirar o máximo partido das suas características individuais.

Como se viu nas secções 4.3.1 e 4.3.2, a base destas funções corresponde basicamente em definir para cada ponto os valores próprios e vetores próprios³ do vetor (4.40) ou (4.64).

³Os vetores próprios definem a matriz transformação entre o sistema de coordenadas global e os eixos principais.

No espaço principal, $\tilde{e}_I, \tilde{e}_{II}, \tilde{e}_{III}$ ou $\tilde{s}_I, \tilde{s}_{II}, \tilde{s}_{III}$, determina-se o ponto de estacionariedade da função objetivo (não tendo em conta as suas restrições). Para o Teorema Estático o ponto de estacionariedade é independente do critério de cedência escolhido e pode-se obter pela expressão (4.67). Por outro lado, para o Teorema Cinemático o ponto de estacionariedade é dependente do critério de cedência escolhido, mas irá depender sempre da expressão (4.43). Se a solução estacionária pertencer ao domínio possível está-se perante a solução ótima do problema (e^* para o Teorema Cinemático e \tilde{s}^* para o Teorema Estático), caso contrário, é necessário projetar esta solução para o domínio possível.

De seguida, apresentam-se as funções definidas para cada um dos critério de cedência estudados neste trabalho. Para cada critério, em primeiro lugar, são apresentadas resumidamente as estratégias de minimização referentes ao Teorema Cinemático, podendo encontrar em [151] uma discussão mais exaustiva. Seguindo-se a explanação detalhada das estratégias adotadas para a minimização referente ao Teorema Estático. Neste caso, de forma a tornar mais clara a exposição, deixou-se cair o índice j em todas as expressões assumindo-se implicitamente que estes são definidas para cada ponto do elemento.

5.2.2.1 Critério de Tresca

Teorema Cinemático

Observando a tabela 2.2, percebe-se que o cálculo exato da dissipação plástica através de integração numérica de Gauss apenas é possível nos elementos isoparamétricos, que utilizam uma aproximação constante do campo da taxa de deformação (tabela 4.1). Este facto, corresponde à maior dificuldade deste critério, surgindo devido à impossibilidade de exprimir o módulo na dissipação plástica como uma função polinomial. Para os elementos subparamétricos, que apresentam uma aproximação linear para o campo da taxa de deformação, é possível majorar a dissipação plástica num elemento i através da seguinte expressão,

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(e^{(i)}) d\Omega \leq \frac{V_{jlmn}^{(i)}}{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} c \left(|e_{I_j}| + |e_{II_j}| + |e_{III_j}| \right) \quad (5.2)$$

não afetando as componentes ótimas da taxa de deformação na solução do problema de minimização local (4.41).

O problema de minimização que se pretende resolver apresenta então a seguinte forma,

$$\min \quad c (|e_I| + |e_{II}| + |e_{III}|) - e_I \Lambda_I - e_{II} \Lambda_{II} - e_{III} \Lambda_{III} + \frac{\rho}{2} (e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) \quad (5.3a)$$

$$\text{sujeito a} \quad e_{III} = -e_I - e_{II} \quad (5.3b)$$

Assim, para se remover o módulo da função objetivo (5.3a), divide-se em quatro regiões a equação do domínio, formado pela interceção da ordenação (2.19) com a restrição

(5.3b), resultando na obtenção para cada zona de um candidato para a solução do problema de minimização:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & e_{III} \end{bmatrix}^T \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\frac{2c - \Lambda_{I_u} + \Lambda_{III_u}}{2\rho}, & 0, & e_{III} \end{bmatrix}^T \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\frac{2c - 2\Lambda_{I_u} + \Lambda_{II_u} + \Lambda_{III_u}}{3\rho}, & -\frac{2c - 2\Lambda_{II_u} + \Lambda_{I_u} + \Lambda_{III_u}}{3\rho}, & e_{III} \end{bmatrix}^T \quad (5.4c)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\frac{4c - 2\Lambda_{I_u} + \Lambda_{II_u} + \Lambda_{III_u}}{3\rho}, & -\frac{-2c - 2\Lambda_{II_u} + \Lambda_{I_u} + \Lambda_{III_u}}{3\rho}, & e_{III} \end{bmatrix}^T \quad (5.4d)$$

onde $(\Lambda_{I_u}, \Lambda_{II_u}, \Lambda_{III_u})$ correspondem às componentes principais do vetor diferenciável Λ_u , expressão (4.43), e e_{III} é obtido pela equação (5.3b). A solução ótima corresponde então ao candidato que apresenta o menor valor da função objetivo.

O problema de estados planos de deformação define-se como um caso particular do problema tridimensional, bastando para isso considerar adicionalmente a restrição,

$$e_{II} = 0 \quad (5.5)$$

Logo, o conjunto dos candidatos (5.4), reduz-se apenas ao grupo formado por (5.4a) e (5.4b).

Teorema Estático

A função implementada para o Teorema Estático, inicia-se por testar se o ponto estacionário (4.67) verifica o critério de Tresca (tabela 2.1). Podendo ocorrer duas situações possíveis: pertencer ao domínio possível, logo está-se perante a solução ótima do problema,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \tilde{\mathbf{s}}_u \quad (5.6)$$

ou não verificar a restrição, sendo necessário projetar a solução estacionária para o domínio possível. Esta projeção corresponde basicamente em achar o ponto mais próximo de $\tilde{\mathbf{s}}_u$ localizado na superfície de cedência,

$$f(\tilde{\mathbf{s}}) = 0 \quad (5.7)$$

que para este caso corresponde,

$$\tilde{s}_I - \tilde{s}_{II} - 2c = 0 \quad (5.8)$$

porque não só esta superfície é convexa, como todos os termos quadráticos na função objetivo (4.65a) são afetados pelo mesmo coeficiente $(\rho/2)$, logo as isosuperfícies desta função correspondem a superfícies esféricas centradas no ponto estacionário $(\tilde{\mathbf{s}}_u)$.

Neste caso, a superfície de cedência, equação (5.8), é independente do invariante linear (2.9), dependendo somente no diâmetro do círculo de Mohr, o que implica que a imagem

no plano π não depende da posição na diagonal espacial, definindo assim um hexaedro infinito regular (todos os lados apresentam a mesma dimensão), como ilustrado na figura 2.3.

Devido à ordenação adotada para as componentes das tensões (2.11), a solução da projeção apenas pode ser localizada numa face (ou respectivas arestas) como indicado na figura 5.1.

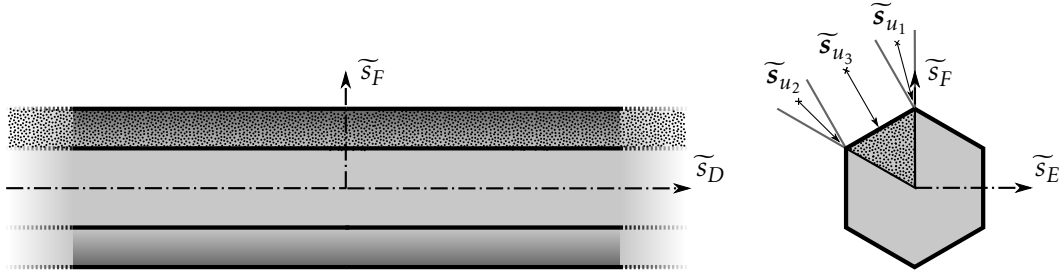


Figura 5.1: Zonas de projeção para o critério de Tresca

Por conveniência, procede-se à mudança de variáveis para o referencial, $(\tilde{s}_D, \tilde{s}_E, \tilde{s}_F)$, formado pela diagonal espacial e pelo plano π ,

$$\tilde{s}_D = \frac{1}{3}(\tilde{s}_I + \tilde{s}_{II} + \tilde{s}_{III}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.9a)$$

$$\tilde{s}_E = \frac{1}{2}(\tilde{s}_{III} - \tilde{s}_{II}) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.9b)$$

$$\tilde{s}_F = \frac{1}{6}(2\tilde{s}_I - \tilde{s}_{II} - \tilde{s}_{III}) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (5.9c)$$

logo, o campo de tensões original obtém-se pela inversão destas equações,

$$\tilde{s}_I = \frac{1}{3}(\tilde{s}_D + \sqrt{2}\tilde{s}_F) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T \quad (5.10a)$$

$$\tilde{s}_{II} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}\tilde{s}_D - \sqrt{3}\tilde{s}_E - \tilde{s}_F) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^T \quad (5.10b)$$

$$\tilde{s}_{III} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}\tilde{s}_D + \sqrt{3}\tilde{s}_E - \tilde{s}_F) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^T \quad (5.10c)$$

sendo o valor destas tensões, $(\tilde{s}_D, \tilde{s}_E, \tilde{s}_F, \tilde{s}_I, \tilde{s}_{II}, \tilde{s}_{III})$, obtidas pela norma das suas componentes. Por este raciocínio, define-se a superfície de cedência (5.8) no novo referencial, figura 5.1, que corresponde a uma reta definida pela seguinte expressão:

$$\tilde{s}_F = \frac{1}{\sqrt{3}}(\tilde{s}_E + 2\sqrt{2}c) \quad (5.11)$$

Pela figura 5.1, percebe-se que a projeção para esta reta é definida por três zonas. A zona 1 corresponde ao domínio formado por,

$$\tilde{s}_E \leq 0 \cap \tilde{s}_F > -\sqrt{3}\tilde{s}_E + \frac{2\sqrt{6}}{3}c \Leftrightarrow \tilde{s}_{III} \leq \tilde{s}_{II} \cap \tilde{s}_I > 2\tilde{s}_{II} - \tilde{s}_{III} + 2c \quad (5.12)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{s}^* = \tilde{s}_{D_{u_1}} + \frac{2}{3}c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

A zona 2 corresponde ao domínio formado por,

$$\tilde{s}_F \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}\tilde{s}_E \cap \tilde{s}_F < -\sqrt{3}\tilde{s}_E - \frac{2\sqrt{6}}{3}c \Leftrightarrow \tilde{s}_I \geq \tilde{s}_{II} \cap \tilde{s}_I < 2\tilde{s}_{II} - \tilde{s}_{III} - 2c \quad (5.14)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \tilde{\mathbf{s}}_{D_{u_2}} + \frac{2}{3}c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

onde em $\tilde{\mathbf{s}}_{D_{u_2}}$ o índice 2 é relativo à zona do domínio (raciocínio semelhante é utilizado daqui por diante). Por fim, a zona 3 é definida pelo restante domínio e neste caso da solução da projeção resulta,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{s}_{I_{u_3}} + \tilde{s}_{III_{u_3}}) + c \\ \tilde{s}_{II_{u_3}} \\ \frac{1}{2}(\tilde{s}_{I_{u_3}} + \tilde{s}_{III_{u_3}}) - c \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

O problema de estados planos de deformação define-se como um caso particular do problema tridimensional, bastando para isso, resolver o problema no plano $I - III$ mas não esquecendo que normalmente $\tilde{s}_{II} \neq 0$. Logo, a projeção resume-se à zona 3, com solução (5.16). Por simplicidade, através da matriz de transformação (4.66), converteu-se esta projeção para as suas componentes no referencial global, obtendo-se assim,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{s}_{I_{u_3}} + \tilde{s}_{III_{u_3}}) + c \\ \frac{1}{2}(\tilde{s}_{I_{u_3}} + \tilde{s}_{III_{u_3}}) - c \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{avg} + \frac{c}{\tilde{s}_R}(\tilde{s}_x - \tilde{s}_{avg}) \\ \tilde{s}_{avg} - \frac{c}{\tilde{s}_R}(\tilde{s}_x - \tilde{s}_{avg}) \\ \frac{c}{\tilde{s}_R}\tilde{s}_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

onde \tilde{s}_R corresponde ao raio do círculo de Mohr do campo das tensões,

$$\tilde{s}_R = \sqrt{\frac{1}{4}(\tilde{s}_x - \tilde{s}_y)^2 + \tilde{s}_{xy}^2} \quad (5.18)$$

e \tilde{s}_{avg} à tensão média,

$$\tilde{s}_{avg} = \frac{1}{2}(\tilde{s}_x + \tilde{s}_y) \quad (5.19)$$

5.2.2.2 Critério de Tresca truncado em tração

Teorema Cinemático

A introdução de uma truncatura em tração no critério de Tresca provoca algumas alterações em relação ao raciocínio original (secção 5.2.2.1). O problema de minimização que se pretende resolver apresenta então a seguinte forma,

$$\min \quad \mathcal{L}_{L_{Tresca}}^*(\mathbf{e}^{(i)}) + (\sigma_T - c)(e_I + e_{II} + e_{III}) \quad (5.20a)$$

$$\text{sujeito a} \quad e_I + e_{II} + e_{III} \geq 0 \quad (5.20b)$$

Como se verifica-se, é adicionado um termo ao cálculo da dissipação plástica e por outro, torna-se a restrição da regra de normalidade numa desigualdade. Esta última alteração provoca que, para além da projeção sobre a superfície que delimita o espaço auxiliar, equação (5.3b), que se obtém pela escolha do melhor candidato do grupo (5.4), considerando a substituição:

$$\Lambda_u \cup \Lambda_u + c - \sigma_T \quad (5.21)$$

dado que $c - \sigma_T$ corresponde à contribuição adicional da truncatura para o vetor Λ_u . Seja também necessário verificar a existência de algum candidato no interior do espaço auxiliar, equação (5.20b), dividindo para isso o domínio, formado pela interceção desta equação com a ordenação (2.19), em sete regiões. Obtendo-se para cada zona um candidato para a solução do problema de minimização,

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 0, 0]^T \quad (5.22a)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 0, \quad 2\Lambda_{III_u} + 2c]^T \quad (5.22b)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{II_u} + 2c, \quad 0]^T \quad (5.22c)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{II_u} + 2c, \quad 2\Lambda_{III_u} + 2c]^T \quad (5.22d)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{II_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{III_u} + 2c]^T \quad (5.22e)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{II_u} - 2c, \quad 0]^T \quad (5.22f)$$

$$e = \frac{1}{2\rho} [2\Lambda_{I_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{II_u} - 2c, \quad 2\Lambda_{III_u} - 2c]^T \quad (5.22g)$$

considerando igualmente a substituição (5.21). A solução ótima anterior (obtida sobre a superfície que delimite o espaço auxiliar) será alterada caso algum candidato possível (5.22) verifique a condição (5.20b) e provoque uma redução do valor da função objetivo.

O problema de estados planos de deformação define-se como um caso particular do problema tridimensional, bastando para isso considerar adicionalmente a restrição (5.5). Logo, o conjunto dos candidatos no interior do espaço auxiliar (5.22) reduz-se apenas ao grupo formado por (5.22a) e (5.22b).

Teorema Estático

A função implementada segue a ideia base apresentada para o critério de Tresca para o Teorema Estático (secção 5.2.2.1). Contudo, neste caso, à superfície de cedência acresce a introdução de uma truncatura em tração,

$$\max(\tilde{s}_I - \tilde{s}_{III} - 2c, \tilde{s}_I - \tilde{s}_T) = 0 \quad (5.23)$$

o que provoca que seja dependente do invariante linear. A sua representação corresponde a um hexaedro infinito regular limitado na parte da tração, como ilustrado na figura 2.4. Assim, devido à ordenação (2.11) adotada para as componentes das tensões, a solução da projeção apenas pode ser localizada em duas faces, em cinco arestas, ou no vértice, como indicado na figura 5.2.

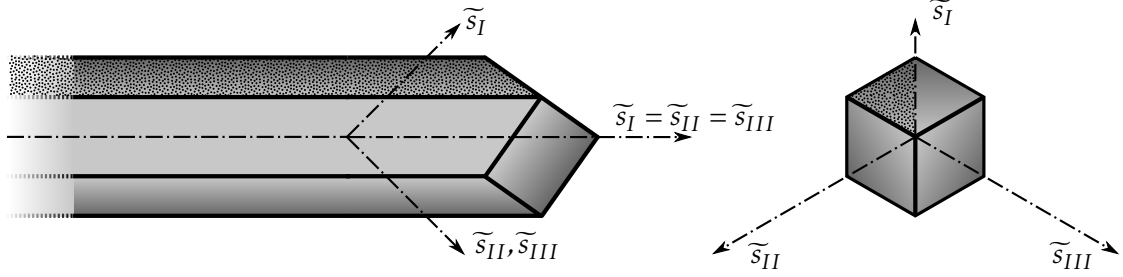


Figura 5.2: Zonas de projeção para o critério de Tresca truncado em tração

Segundo este raciocínio apenas se definiu a função para o caso de problemas de estados planos de deformação. Para uma melhor compreensão representa-se a superfície de cedência no plano $I - III$, ilustrado na figura 5.3.

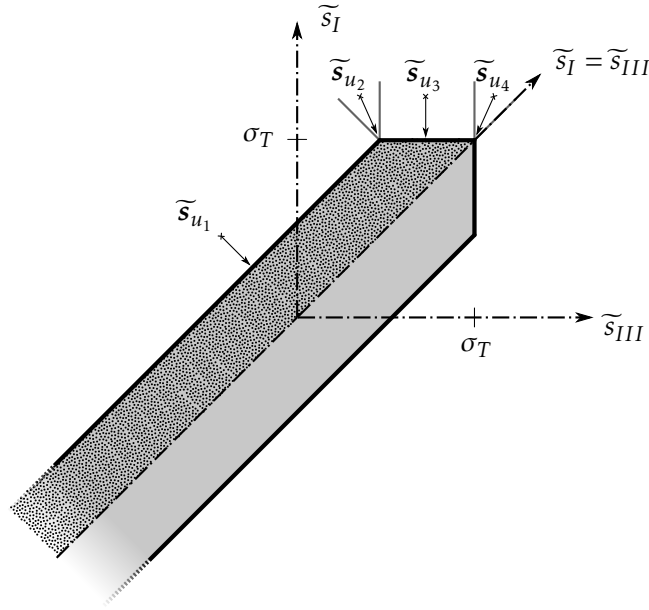


Figura 5.3: Zonas de projeção para o critério de Tresca truncado em tração (deformação plana)

Pela figura 5.3, percebe-se que a projeção para esta superfície é definida por quatro zonas. A zona 1 corresponde ao domínio formado por,

$$\tilde{s}_I \leq -\tilde{s}_{III} + 2(\tilde{s}_T - c) \quad (5.24)$$

obtendo-se a solução apresentada no critério de Tresca em deformação plana (5.17). A zona 2 corresponde ao restante domínio limitado por,

$$\tilde{s}_{III} \leq \tilde{s}_T - 2c \quad (5.25)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_T \\ \tilde{s}_T - 2c \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

A zona 3 corresponde ao restante domínio limitado por,

$$\tilde{s}_{III} \leq \tilde{s}_T \quad (5.27)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_T \\ \tilde{s}_{III_{u_3}} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Por fim, a zona 4 é definida pelo restante domínio e neste caso da solução da projeção resulta,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_T \\ \tilde{s}_T \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

5.2.2.3 Critério de von Mises

Teorema Cinemático

Da tabela 2.2 conclui-se que o cálculo exato da dissipação plástica para o critério de von Mises sofre do mesmo problema que o critério de Tresca (secção 5.2.2.1), logo é igualmente possível majorar a dissipação num elemento subparamétricos i através do mesmo raciocínio,

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}^{(i)}) d\Omega \leq \frac{V_{jlmn}^{(i)}}{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} 2k_y \sqrt{e_{I_j}^2 + e_{II_j}^2 + e_{I_j}e_{II_j}} \quad (5.30)$$

considerando nesta expressão a simplificação obtida pela regra de normalidade (5.3b). O problema de minimização que se pretende resolver apresenta então a seguinte forma,

$$\min \quad 2k_y \sqrt{e_I^2 + e_{II}^2 + e_I e_{II}} + e_I (\Lambda_{III} - \Lambda_I) + e_{II} (\Lambda_{III} - \Lambda_{II}) + \rho (e_I^2 + e_{II}^2 + e_I e_{II}) \quad (5.31a)$$

$$\text{sujeito a} \quad e_{III} = -e_I - e_{II} \quad (5.31b)$$

Neste caso, a solução analítica é obtida considerando o problema da minimização local (5.31) dividido em duas partes: na parte da dissipação plástica e na parte constituída pelos restantes termos. Através de uma mudança de variável percebe-se que a solução ótima do problema original encontra-se localizada no segmento de reta que une os pontos ótimos destes dois subproblemas. Obtendo-se a seguinte expressão,

$$e_{II} = e_I \frac{2\Lambda_{II_u} - \Lambda_{I_u} - \Lambda_{III_u}}{2\Lambda_{I_u} - \Lambda_{II_u} - \Lambda_{III_u}} \quad (5.32)$$

Por fim, adicionando esta condição ao problema de minimização original, resulta pela condição de estacionariedade, num possível candidato à solução do problema. Logo, para além do vértice da origem do referencial surge também o candidato anterior,

$$\mathbf{e} = [0, 0, 0]^T \quad (5.33a)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\rho} \left(2\Lambda_{I_u} - \Lambda_{II_u} - \Lambda_{III_u} - k_y \sqrt{3 \frac{(\Lambda_{III_u} + \Lambda_{II_u} - 2\Lambda_{I_u})^2}{\Lambda_{I_u}^2 + \Lambda_{II_u}^2 + \Lambda_{III_u}^2 - \Lambda_{I_u}\Lambda_{II_u} - \Lambda_{I_u}\Lambda_{III_u} - \Lambda_{II_u}\Lambda_{III_u}}} \right) \\ e_{II} \\ e_{III} \end{bmatrix} \quad (5.33b)$$

onde e_{II} e e_{III} são obtidos respetivamente pelas equações (5.32) e (5.31b). A solução ótima corresponde então ao candidato que apresenta o menor valor da função objetivo.

O problema de estados planos de deformação define-se com o mesmo procedimento apresentado para o problema de estados planos de deformação do critério de Tresca (secção 5.2.2.1) porque neste estado ambas as superfícies coincidem, bastando para isso considerar que o valor da coesão assume o valor de,

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2} k_y \quad (5.34)$$

Teorema Estático

A função implementada segue a ideia base apresentada para o critério de Tresca para o Teorema Estático (secção 5.2.2.1). Contudo neste caso, a superfície de cedência,

$$-k_y + \sqrt{\frac{1}{6}[(\tilde{s}_I - \tilde{s}_{II})^2 + (\tilde{s}_{II} - \tilde{s}_{III})^2 + (\tilde{s}_I - \tilde{s}_{III})^2]} = 0 \quad (5.35)$$

continua a não depender do invariante linear (I_1), mas neste caso a sua secção no plano π corresponde a uma circunferência que circunscreve o hexágono do critério de Tresca. Logo, a sua representação corresponde a um cilindro infinito, como ilustrado na figura 2.5. Devido à ordenação (2.11) adotada para as componentes das tensões a solução da projeção apenas pode ser localizada numa face como indicado na figura 5.4.

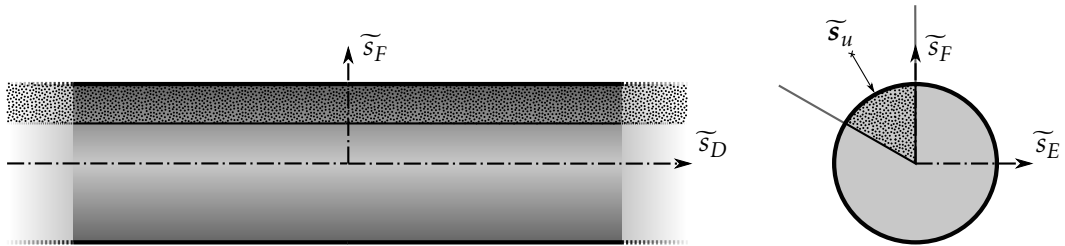


Figura 5.4: Zonas de projeção para o critério de von Mises

Por conveniência, procede-se à mudança de variáveis para o referencial formado pela diagonal espacial e pelo plano π , equações (5.9) e (5.10). Logo a superfície de cedência

(5.35) neste novo referencial, figura 5.4, corresponde a uma circunferência definida pela seguinte expressão:

$$\sqrt{\tilde{s}_E^2 + \tilde{s}_F^2} = \sqrt{2}k_y \quad (5.36)$$

Assim da solução da projeção resulta,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \tilde{\mathbf{s}}_{D_u} + \frac{\sqrt{2}k_y}{\sqrt{\tilde{s}_{E_u}^2 + \tilde{s}_{F_u}^2}} (\tilde{\mathbf{s}}_{E_u} + \tilde{\mathbf{s}}_{F_u}) \quad (5.37)$$

O problema de estados planos de deformação define-se com o mesmo procedimento apresentado para o problema de estados planos de deformação do critério de Tresca (secção 5.2.2.1), porque neste estado ambas as superfícies coincidem. Assim basta substituir na solução da projeção (5.17) o valor da coesão pela expressão (5.34).

5.2.2.4 Critério de Mohr-Coulomb

Teorema Cinemático

Observando a tabela 2.2, percebe-se que a função objetivo nodal do problema de minimização local (4.41) é diferenciável. Apresenta então a seguinte forma,

$$\min \quad \frac{c}{\tan \phi} (e_I + e_{II} + e_{III}) - e_I \Lambda_I - e_{II} \Lambda_{II} - e_{III} \Lambda_{III} + \frac{\rho}{2} (e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) \quad (5.38a)$$

$$\text{sujeito a} \quad e_I + e_{II} + e_{III} \geq (|e_I| + |e_{II}| + |e_{III}|) \sin \phi \quad (5.38b)$$

logo o ponto de estacionariedade (4.14) deste problema apresenta a seguinte expressão:

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\rho} \left(\boldsymbol{\Lambda}_u - \frac{c}{\tan \phi} \right) \quad (5.39)$$

Se \mathbf{e}_u verificar a restrição da normalidade (equação 5.38b) então corresponde ao ponto ótimo do problema de minimização, \mathbf{e}^* . Caso contrário é necessário projetar esta solução para o ponto mais próximo pertencente à superfície que delimita o domínio possível,

$$e_I + e_{II} + e_{III} = (|e_I| + |e_{II}| + |e_{III}|) \sin \phi \quad (5.40)$$

porque aliado a esta superfície ser convexa, a função objetivo resultante (5.38a) apresenta isosuperfícies esféricas centradas no ponto \mathbf{e}_u . Como a superfície (5.40), corresponde ao espaço dual da superfície de cedência, isto é, corresponde a uma pirâmide hexagonal de faces perpendiculares à sua superfície de cedência (figura 2.6), e como se verifica a ordenação (2.19), a solução da projeção apenas pode ser localizada no vértice, em duas

arestas ou numa face da superfície,

$$\mathbf{e} = [0, 0, 0]^T \quad (5.41a)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -(1 + \sin \phi) \frac{\left(\frac{2c}{\tan \phi} - \Lambda_{III_u} - \Lambda_{I_u}\right) \sin \phi - \Lambda_{I_u} + \Lambda_{III_u}}{2\rho(\sin^2 \phi + 1)} \\ 0 \\ -\frac{\left(\frac{2c}{\tan \phi} - \Lambda_{III_u} - \Lambda_{I_u}\right) \sin^2 \phi + 2\left(\Lambda_{III_u} - \frac{c}{\tan \phi}\right) \sin \phi + \Lambda_{I_u} - \Lambda_{III_u}}{2\rho(\sin^2 \phi + 1)} \end{bmatrix} \quad (5.41b)$$

$$\mathbf{e} = \Lambda_u - \begin{bmatrix} 1 - \sin \phi \\ 1 - \sin \phi \\ 1 + \sin \phi \end{bmatrix} \frac{(1 - \sin \phi) \Lambda_{I_u} + (1 - \sin \phi) \Lambda_{II_u} + (1 + \sin \phi) \Lambda_{III_u}}{2(1 - \sin \phi)^2 + (1 + \sin \phi)^2} \quad (5.41c)$$

$$\mathbf{e} = \Lambda_u - \begin{bmatrix} 1 - \sin \phi \\ 1 + \sin \phi \\ 1 + \sin \phi \end{bmatrix} \frac{(1 - \sin \phi) \Lambda_{I_u} + (1 + \sin \phi) \Lambda_{II_u} + (1 + \sin \phi) \Lambda_{III_u}}{(1 - \sin \phi)^2 + 2(1 + \sin \phi)^2} \quad (5.41d)$$

A solução ótima projetada corresponde então ao candidato (5.41) que verifique a restrição de normalidade (tabela 5.38b) e apresente o menor valor da função objetivo.

O problema de estados planos de deformação define-se como um caso particular do problema tridimensional, bastando para isso considerar adicionalmente a restrição (5.5). Logo a expressão do ponto de estacionariedade (5.39) apenas se verifica nas direções principais $I - III$ e o resultado da projeção, caso seja necessário, apenas se pode localizar no vértice, expressão (5.41a), ou na aresta da superfície, expressão (5.41b).

Teorema Estático

A função implementada segue a ideia base apresentada para o critério de Tresca para o Teorema Estático (secção 5.2.2.1). Contudo neste caso, a superfície de cedência,

$$\tilde{s}_I - \tilde{s}_{III} + (\tilde{s}_I + \tilde{s}_{III}) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (5.42)$$

apesar de depender do invariante linear (I_1), apresenta igualmente no plano π a forma de um hexágono, definindo assim uma pirâmide hexagonal de expansão, como ilustrado na figura 2.6.

Devido à ordenação adotada (2.11) para as componentes das tensões a solução da projeção apenas pode ser localizada numa face (ou respetivas arestas e vértice) como indicado na figura 5.5.

Por conveniência, procede-se à mudança de variáveis para o referencial formado pela diagonal espacial e pelo plano π , equações (5.9) e (5.10). Logo, a superfície de cedência (5.42) neste novo referencial, corresponde a um plano triangular definida pela seguinte expressão:

$$\sqrt{3}(1 - \sin \phi) \tilde{s}_E + (3 + \sin \phi) \tilde{s}_F = 2\sqrt{6}c \cos \phi - 2\sqrt{2} \sin \phi \tilde{s}_D \quad (5.43)$$

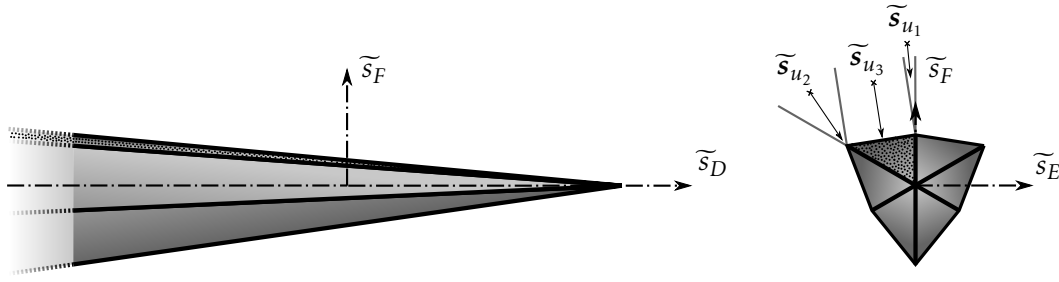


Figura 5.5: Zonas de projeção para o critério de Mohr-Coulomb

Logo pela figura 5.5, percebe-se que a projeção para este plano é definida por quatro zonas. A zona 1 corresponde ao domínio formado por,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_E \leq 0 \cap \frac{\sqrt{3}(3\sin^2\phi + 2\sin\phi + 3)}{-(\sin\phi - 1)}\tilde{s}_E + (3 + \sin\phi)\tilde{s}_F &> 2\sqrt{6}c\cos\phi - 2\sqrt{2}\sin\phi\tilde{s}_D \Leftrightarrow \\ \tilde{s}_{III} \leq \tilde{s}_{II} \cap \cos^2\phi\tilde{s}_I + (2\cos^2\phi - 4)\tilde{s}_{II} + (\sin\phi + 1)^2\tilde{s}_{III} &> -2c\cos\phi(\sin\phi - 1) \end{aligned} \quad (5.44)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{s}^* = \frac{1}{3\sin^2\phi + 2\sin\phi + 3} \begin{bmatrix} (\sin\phi - 1)^2\tilde{s}_{I_{u_1}} + \cos^2\phi(\tilde{s}_{II_{u_1}} + \tilde{s}_{III_{u_1}}) + 4c\cos\phi(\sin\phi + 1) \\ \cos^2\phi\tilde{s}_{I_{u_1}} + (\sin\phi + 1)^2(\tilde{s}_{II_{u_1}} + \tilde{s}_{III_{u_1}}) + 2c\cos\phi(\sin\phi - 1) \\ \cos^2\phi\tilde{s}_{I_{u_1}} + (\sin\phi + 1)^2(\tilde{s}_{II_{u_1}} + \tilde{s}_{III_{u_1}}) + 2c\cos\phi(\sin\phi - 1) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

A zona 2 corresponde ao domínio formado por,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_F \geq -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+1}}\tilde{s}_E \cap \frac{\sqrt{3}(4-\cos^2\phi)}{-(\sin\phi + 1)}\tilde{s}_E + \frac{5\sin^2\phi - 4\sin\phi + 3}{-(\sin\phi + 1)}\tilde{s}_F &> 2\sqrt{6}c\cos\phi - 2\sqrt{2}\sin\phi\tilde{s}_D \Leftrightarrow \\ \tilde{s}_I \geq \tilde{s}_{II} \cap (\sin\phi - 1)^2\tilde{s}_I + (2\cos^2\phi - 4)\tilde{s}_{II} + \cos^2\phi\tilde{s}_{III} &< -2c\cos\phi(\sin\phi + 1) \end{aligned} \quad (5.46)$$

obtendo-se a seguinte solução,

$$\tilde{s}^* = \frac{1}{3\sin^2\phi - 2\sin\phi + 3} \begin{bmatrix} (\sin\phi - 1)^2(\tilde{s}_{I_{u_2}} + \tilde{s}_{II_{u_2}}) + \cos^2\phi\tilde{s}_{III_{u_2}} + 2c\cos\phi(\sin\phi + 1) \\ (\sin\phi - 1)^2(\tilde{s}_{I_{u_2}} + \tilde{s}_{II_{u_2}}) + \cos^2\phi\tilde{s}_{III_{u_2}} + 2c\cos\phi(\sin\phi + 1) \\ \cos^2\phi(\tilde{s}_{I_{u_2}} + \tilde{s}_{II_{u_2}}) + (\sin\phi + 1)^2\tilde{s}_{III_{u_2}} + 4c\cos\phi(\sin\phi - 1) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Por fim, a zona 3 é definida pelo restante domínio e neste caso da solução da projeção resulta,

$$\tilde{s}^* = \begin{bmatrix} \frac{(\sin\phi - 1)^2\tilde{s}_{I_{u_3}} + \cos^2\phi\tilde{s}_{III_{u_3}} + 2c\cos\phi(\sin\phi + 1)}{2(\sin^2\phi + 1)} \\ \tilde{s}_{II_{u_3}} \\ \frac{\cos^2\phi\tilde{s}_{I_{u_3}} + (\sin\phi + 1)^2\tilde{s}_{III_{u_3}} + 2c\cos\phi(\sin\phi - 1)}{2(\sin^2\phi + 1)} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Caso a solução da projeção, equações (5.45), (5.47) e (5.48), não verifiquem a ordenação (2.11) previamente estabelecida significa que estamos a projetar para para além do vértice da pirâmide hexagonal de expansão. Nestes casos, a solução corresponde às coordenadas

do vértice,

$$\bar{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \frac{c}{\tan \phi} \\ \frac{\tan \phi}{c} \\ \frac{\tan \phi}{c} \\ \tan \phi \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

O problema de estados planos de deformação define-se como um caso particular do problema tridimensional, bastando para isso resolver o problema no plano $I - III$ mas não esquecendo que normalmente $\bar{s}_{II} \neq 0$. Logo a projeção resume-se à zona 3, com solução (5.48) e caso não se verifique a ordenação adotada para o tensor das tensões à solução (5.49). Por simplicidade, através da matriz de transformação (4.66) converteu-se a projeção (5.48) para as suas componentes no referencial global, obtendo-se assim,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}^* &= \begin{bmatrix} \frac{(\sin \phi - 1)^2 \bar{s}_{I_{u_3}} + \cos^2 \phi \bar{s}_{III_{u_3}} + 2c \cos \phi (\sin \phi + 1)}{2(\sin^2 \phi + 1)} \\ \frac{\cos^2 \phi \bar{s}_{I_{u_3}} + (\sin \phi + 1)^2 \bar{s}_{III_{u_3}} + 2c \cos \phi (\sin \phi - 1)}{2(\sin^2 \phi + 1)} \end{bmatrix} \rightarrow \\ \bar{\mathbf{s}}^* &= \begin{bmatrix} \frac{\bar{s}_{avg} + \sin \phi (c \cos \phi - \bar{s}_R)}{1 + \sin^2 \phi} + \frac{c \cos \phi - \bar{s}_{avg} \sin \phi}{\bar{s}_R} (\bar{s}_x - \bar{s}_{avg}) \\ \frac{\bar{s}_{avg} + \sin \phi (c \cos \phi - \bar{s}_R)}{1 + \sin^2 \phi} - \frac{c \cos \phi - \bar{s}_{avg} \sin \phi}{\bar{s}_R} (\bar{s}_x - \bar{s}_{avg}) \\ \frac{c \cos \phi - \bar{s}_{avg} \sin \phi}{\bar{s}_R} \bar{s}_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Caso se verifique a condição,

$$\sin \phi (\bar{s}_{avg} - \bar{s}_R \sin \phi) < c \cos \phi \quad (5.51)$$

a solução (5.49) resulta,

$$\bar{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \frac{c}{\tan \phi} \\ \frac{\tan \phi}{c} \\ \tan \phi \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{s}}^* = \begin{bmatrix} \frac{c}{\tan \phi} \\ \frac{\tan \phi}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

sendo \bar{s}_R e \bar{s}_{avg} obtidos respetivamente pelas equações (5.18) e (5.19).

5.2.2.5 Critério de Drucker-Prager

Teorema Cinemático

Observando a tabela 2.2, percebe-se que o critério de Drucker-Prager difere em relação ao critério de Mohr-Coulomb apenas na condição de normalidade. Assim, o domínio em vez de ser um cone positivo semi-definido passa a ser definido por um cone de segunda ordem [20], sendo a superfície que o delimita definida neste caso por,

$$e_I + e_{II} + e_{III} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} (3(e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) - (e_I + e_{II} + e_{III})^2)} \quad (5.53)$$

O problema de minimização que se pretende resolver apresenta então a seguinte forma,

$$\min \frac{c}{\tan \phi} (e_I + e_{II} + e_{III}) - e_I \Lambda_I - e_{II} \Lambda_{II} - e_{III} \Lambda_{III} + \frac{\rho}{2} (e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) \quad (5.54a)$$

$$\text{sujeito a } e_I + e_{II} + e_{III} \geq \sqrt{\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} (3(e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) - (e_I + e_{II} + e_{III})^2)} \quad (5.54b)$$

Seguindo o procedimento adotado para o critério de Mohr-Coulomb (secção 5.2.2.4) percebe-se que caso a solução estacionária, dada pela expressão (5.39), não verificar a restrição da normalidade, equação (5.54b), é necessário executar uma projeção. Através dos mesmos pressupostos percebe-se que a solução da projeção apenas pode ser localizada no vértice ou na face da superfície,

$$\mathbf{e} = [0, 0, 0]^T \quad (5.55a)$$

$$\mathbf{e} = \frac{\sqrt{\frac{12J_2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi}} (\Lambda_{I_u} + \Lambda_{II_u} + \Lambda_{III_u} - \frac{3c}{\tan \phi}) + 6J_2}{18\rho J_2 \left(\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} + 1 \right)} \left(\sqrt{\frac{12J_2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi}} + \begin{bmatrix} 2\Lambda_{I_u} - \Lambda_{II_u} - \Lambda_{III_u} \\ 2\Lambda_{II_u} - \Lambda_{I_u} - \Lambda_{III_u} \\ 2\Lambda_{III_u} - \Lambda_{I_u} - \Lambda_{II_u} \end{bmatrix} \right) \quad (5.55b)$$

onde J_2 corresponde ao 2º invariante fundamental da parcela deviatórica, definida pela equação (2.10), que simplificando corresponde,

$$J_2 = \frac{\Lambda_{I_u}^2 + \Lambda_{II_u}^2 + \Lambda_{III_u}^2 - \Lambda_{I_u} \Lambda_{II_u} - \Lambda_{II_u} \Lambda_{III_u} - \Lambda_{I_u} \Lambda_{III_u}}{3} \quad (5.56)$$

A solução ótima projetada corresponde então ao candidato (5.55) que verifique a restrição de normalidade, equação (5.54b), e apresente o menor valor da função objetivo.

O problema de estados planos de deformação define-se com o mesmo procedimento apresentado para o problema de estados planos de deformação do critério de Mohr-Coulomb (secção 5.2.2.4) porque neste estado ambas as superfícies coincidem.

Teorema Estático

A função implementada segue a ideia base apresentada para o critério de Tresca para o Teorema Estático (secção 5.2.2.1). Contudo neste caso, a superfície de cedência,

$$\frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{3 + \sin^2 \phi}} \left(\frac{c}{\tan \phi} - \frac{\tilde{s}_I + \tilde{s}_{II} + \tilde{s}_{III}}{3} \right) + \sqrt{\frac{1}{6} [(\tilde{s}_I - \tilde{s}_{II})^2 + (\tilde{s}_{II} - \tilde{s}_{III})^2 + (\tilde{s}_I - \tilde{s}_{III})^2]} = 0 \quad (5.57)$$

depende do invariante linear (I_1) e apresenta no plano π a forma de uma circunferência que toca três vezes no hexágono do critério de Mohr-Coulomb, como visualizado na figura 5.6.

Logo, a sua representação corresponde a um cone de expansão, como ilustrado na figura 2.7. Devido à ordenação adotada (2.11) para as componentes das tensões a solução

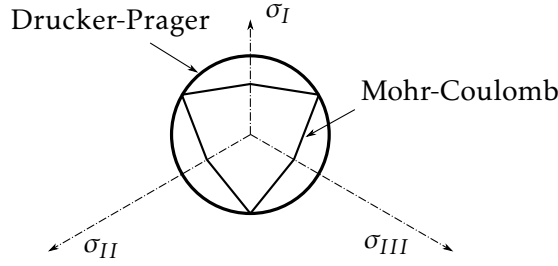


Figura 5.6: Comparação no plano π do Critério de Drucker-Prager com o critério de Mohr-Coulomb

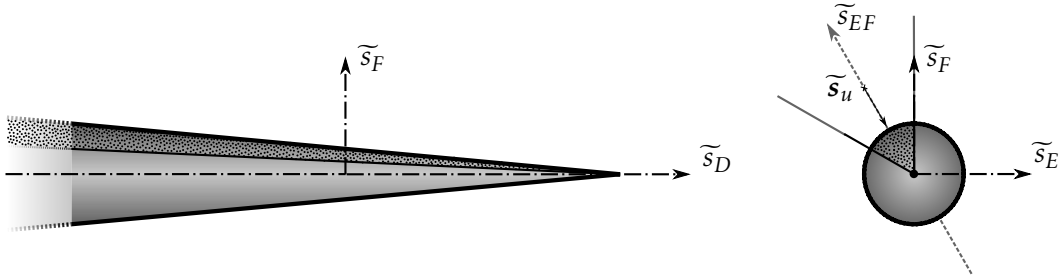


Figura 5.7: Zonas de projeção para o critério de Drucker-Prager

da projeção apenas pode ser localizada numa face (ou vértice) como indicado na figura 5.7.

Por conveniência, procede-se à mudança de variáveis para o referencial formado pela diagonal espacial e pelo plano π , equações (5.9) e (5.10). Logo, a superfície de cedência (5.57) neste novo referencial, figura 5.7, corresponde a um plano curvo definida pela seguinte expressão:

$$\sqrt{\tilde{s}_E^2 + \tilde{s}_F^2} = \frac{\sqrt{6} \sin \phi}{\sqrt{3 + \sin^2 \phi}} \left(\frac{c}{\tan \phi} - \frac{\tilde{s}_D}{\sqrt{3}} \right) \quad (5.58)$$

Para simplificar ainda mais esta expressão, define-se um novo referencial que mantém à mesma o eixo \tilde{s}_D , mas considera a soma das contribuições no plano π ($\tilde{s}_{EF} = \tilde{s}_E + \tilde{s}_F$), obtendo-se a seguinte equação da reta,

$$\tilde{s}_D = -\sqrt{\frac{(3 + \sin^2 \phi) J_2}{\sin^2 \phi}} \tilde{s}_{EF} + \frac{\sqrt{3}c}{\tan \phi} \quad (5.59)$$

sendo J_2 o 2º invariante fundamental da parcela deviatórica, definido pela equação (2.10), que simplificando corresponde a,

$$J_2 = \frac{\tilde{s}_{I_u}^2 + \tilde{s}_{II_u}^2 + \tilde{s}_{III_u}^2 - \tilde{s}_{I_u} \tilde{s}_{II_u} - \tilde{s}_{II_u} \tilde{s}_{III_u} - \tilde{s}_{I_u} \tilde{s}_{III_u}}{3} \quad (5.60)$$

e \tilde{s}_{EF} corresponde à norma da componente \tilde{s}_{EF} .

Assim, a solução da projeção pode ser obtida através do mínimo local da função (4.65a) neste novo referencial, considerando adicionalmente as equações (5.59) e (4.67). Logo,

deste sistema de equações obtém-se a solução final,

$$\tilde{\mathbf{s}}^* = \frac{-\sqrt{\frac{3(3+\sin^2\phi)J_2}{\sin^2\phi}}\left(3\tilde{\mathbf{s}}_{D_u} - \frac{3c}{\tan\phi}\right) + 6J_2\left(-\sqrt{\frac{3(3+\sin^2\phi)J_2}{\sin^2\phi}} + 3\tilde{\mathbf{s}}_{EF_u}\right) + \frac{c}{\tan\phi}}{3J_2\left(\frac{3(3+\sin^2\phi)}{\sin^2\phi} + 2\right)} \quad (5.61)$$

Caso a solução da projeção, equação (5.61), não verifique a ordenação previamente estabelecida (2.11) significa que estamos a projetar para para além do vértice do cone de expansão. Neste caso, a solução corresponde às coordenadas do vértice, equação (5.49).

O problema de estados planos de deformação define-se com o mesmo procedimento apresentado para o problema de estados planos de deformação do critério de Mohr-Coulomb (secção 5.2.2.4), porque neste estado ambas as superfícies coincidem.

5.2.3 Atualização do multiplicador de Lagrange

A atualização do multiplicador de Lagrange é dada pela equação (4.45) para o Teorema Cinemático e pela equação (4.69) para o Teorema Estático, como se viu anteriormente. Esta atualização corresponde à execução de operações matriciais muito simples. Esta etapa ainda se simplifica mais, dado que as variáveis associadas a cada ponto de cada elemento se encontram desacopladas, logo pode-se realizar esta operação de uma forma local e independente pontualmente.

5.2.4 Critério de paragem

Da análise das expressões que permitem calcular os erros (4.44) e (4.68) para o Teorema Cinemático e para o Teorema Estático, respetivamente, constata-se que é difícil estabelecer um valor numérico para as tolerâncias (ϵ^{primal} e ϵ^{dual}), dado que estes resíduos não têm em consideração o efeito de escala do problema. Para contornar esta limitação optou-se por escalar os resíduos pelo respetivo valor máximo,

$$\|\mathbf{r}_p^{k+1}\| \hookrightarrow \frac{\|\mathbf{r}_p^{k+1}\|}{\max(\|\mathbf{r}_p^1\|, \|\mathbf{r}_p^2\|, \dots, \|\mathbf{r}_p^{k+1}\|)} \quad (5.62a)$$

$$\|\mathbf{r}_d^{k+1}\| \hookrightarrow \frac{\|\mathbf{r}_d^{k+1}\|}{\max(\|\mathbf{r}_d^1\|, \|\mathbf{r}_d^2\|, \dots, \|\mathbf{r}_d^{k+1}\|)} \quad (5.62b)$$

5.2.5 Extensões da Formulação Clássica

Nesta secção apresentam-se as estratégias adotadas nas extensões à formulação clássica que fazem parte do algoritmo final (secção 4.2.5): estimativa inicial do parâmetro de penalidade e variação do parâmetro de penalidade.

Como foi referido na secção 4.2.5.1, o valor inicial ótimo do parâmetro de penalidade é dependente do problema. A prática revelou que a expressão (4.26) produz bons resultados. Este parâmetro de penalidade é obtido facilmente através da resolução do seguinte

sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{B} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1/\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

dado que se pretende re-utilizar a matriz do sistema governativo (5.1).

Para finalizar, fazem-se algumas considerações sobre a atualização do parâmetro de penalidade no decorrer do processo iterativo. A aplicação da técnica (4.27) é realizada utilizando o escalamento definido pela expressão (5.62). Este processo de atualização apresenta uma grande rapidez dado que a sua atualização é baseada em variáveis previamente definidas.

Como nota, de referir que se encontra em fase de desenvolvimento um novo processo de atualização do parâmetro de penalidade que consiste basicamente na mesma ideia apresentada na secção 4.2.5.2. A diferença primordial entre estes dois métodos corresponde que o novo processo tem em conta um intervalo de iterações em vez de se focar apenas numa única iteração. Assim, neste novo método se o rácio entre os resíduos primal e dual não estiver dentro da abertura da zona de confiança μ ao fim de k iterações (dependendo do tamanho do problema analisado) procede-se à atualização do parâmetro de penalidade ρ . Neste caso, considera-se que o parâmetro que escala o tamanho do passo ϑ é definido por uma escala logarítmica que depende do rácio entre os resíduos, em vez de ser um parâmetro fixo.

5.2.6 Paralelização do algoritmo MDAM

Analisando as etapas que constituem o algoritmo MDAM, algoritmo 2, percebe-se que este algoritmo apresenta uma grande facilidade de conversão para ser implementado em paralelo. Através do desenvolvimento do algoritmo na sua vertente paralela, permite-se não só aumentar o tamanho dos problemas analisados (principalmente na resolução de problemas de geometrias sólidas tridimensionais), bem como permite que estes problemas sejam analisados através de um intervalo de tempo mais aceitável.

De facto, resolvendo o problema de forma sequencial existe sempre, apesar dos constantes desenvolvimentos tecnológicos existentes na área de informática (velocidade de processamento, capacidade de memória e armazenamento de dados), limitação na qualidade da estimativa obtida da carga de colapso de sistemas mecânicos com um comportamento perfeitamente plástico. Considera-se que a computação paralela na Análise Limite, corresponde hoje em dia a uma estratégia relevante e de inegável interesse.

O algoritmo paralelo implementado corresponde a um modelo de arquitetura de memória distribuída (cada processador é capaz de endereçar apenas a sua memória local), na qual a comunicação de dados entre diferentes processos é realizada através do programa padrão *MPI - Message Passing Interface* [142]. Neste tipo de arquitetura pretende-se reduzir a frequência e o tamanho das mensagens trocadas, dado que a comunicação inter-processadores apresenta uma velocidade muito inferior comparada com as comunicações CPU/memória.

Um dos principais fatores que contribuem para se atingir este objetivo, passa por se executar uma boa partição do domínio analisado, que se define basicamente pela equitatividade dos elementos atribuídos a cada processador, pela redução do número de nós partilhados por cada subdomínio (quando aplicado) e claro pela sua eficiência numérica. Logo, para se obter uma boa partição do domínio optou-se pela utilização do programa de código aberto denominado *METIS* [64], dado que demonstrou um bom equilíbrio entre os diversos fatores.

O algoritmo paralelo baseia-se no modelo de comunicação *Master/Slaves*. Neste modelo, um processo denominado de *Master* tem o controlo sobre os restantes processos denominados por *Slaves*. Isto é, o processo *Master* tem como funções, decompor o problema em tarefas que irão ser executadas pelos restantes processos *Slaves*, bem como efetuar a recolha de informação destes processos de forma a monitorizar a evolução da solução.

Assim o algoritmo MDAM implementado na sua vertente paralela, foi concebido como ilustrado na figura 5.8. Observando esta figura, constata-se que o número de cálculos do processo *Master* é inferior ao dos processos *Slaves*, logo considerou-se que o processador que fica encarregue do processo *Master* também acumula um processo *Slave*.

De seguida expõe-se o raciocínio inerente ao algoritmo paralelo implementado (figura 5.8). Inicialmente, o processo *Master* fica encarregue de ler o domínio da malha e de executar a sua partição e respetiva distribuição pelos restantes processos *Slaves*. Cada processo *Slave*, apenas recebe o subdomínio correspondente à partição que lhe foi atribuída.

De seguida, cada processo *Slave*, procede à numeração dos Graus de liberdade (DOF) referentes ao campo das tensões/deformações (e, s). Em relação à numeração dos graus de liberdade referentes ao vetor das velocidades (v) do domínio, esta fase fica a cargo do processo *Master*, ficando igualmente responsável por distribuir esta informação pelos restantes processos *Slaves* de acordo com a partição efetuada. Em termos da nomenclatura utilizada no algoritmo MDAM, isto significa que, os graus de liberdade referentes ao campo das tensões/deformações correspondem às grandezas locais e por outro lado, os graus de liberdade referentes ao campo das velocidades correspondem às grandezas globais.

Cada processo *Slave*, está agora capacitado de montar o seu bloco da matriz do sistema governativo, considerando para isso as contribuições dos elementos finitos dos respetivos subdomínios. Comunicando de seguida este bloco à vertente paralela da ferramenta numérica *MUMPS* que executa a fatorização completa da matriz do sistema governativo.

Seguidamente, o processo *Slave* inicia o algoritmo iterativo MDAM. Como referido anteriormente, o algoritmo iterativo MDAM apresenta uma grande facilidade para se converter na sua vertente paralela, não necessitando por isso de grandes alterações em relação à sua vertente sequencial (algoritmo 2).

Na primeira etapa do algoritmo, a minimização global consiste na resolução de um sistema de equações lineares utilizando para isso a ferramenta numérica *MUMPS*. Esta ferramenta permite reutilizar a matriz fatorizada previamente, utilizando-a nas etapas

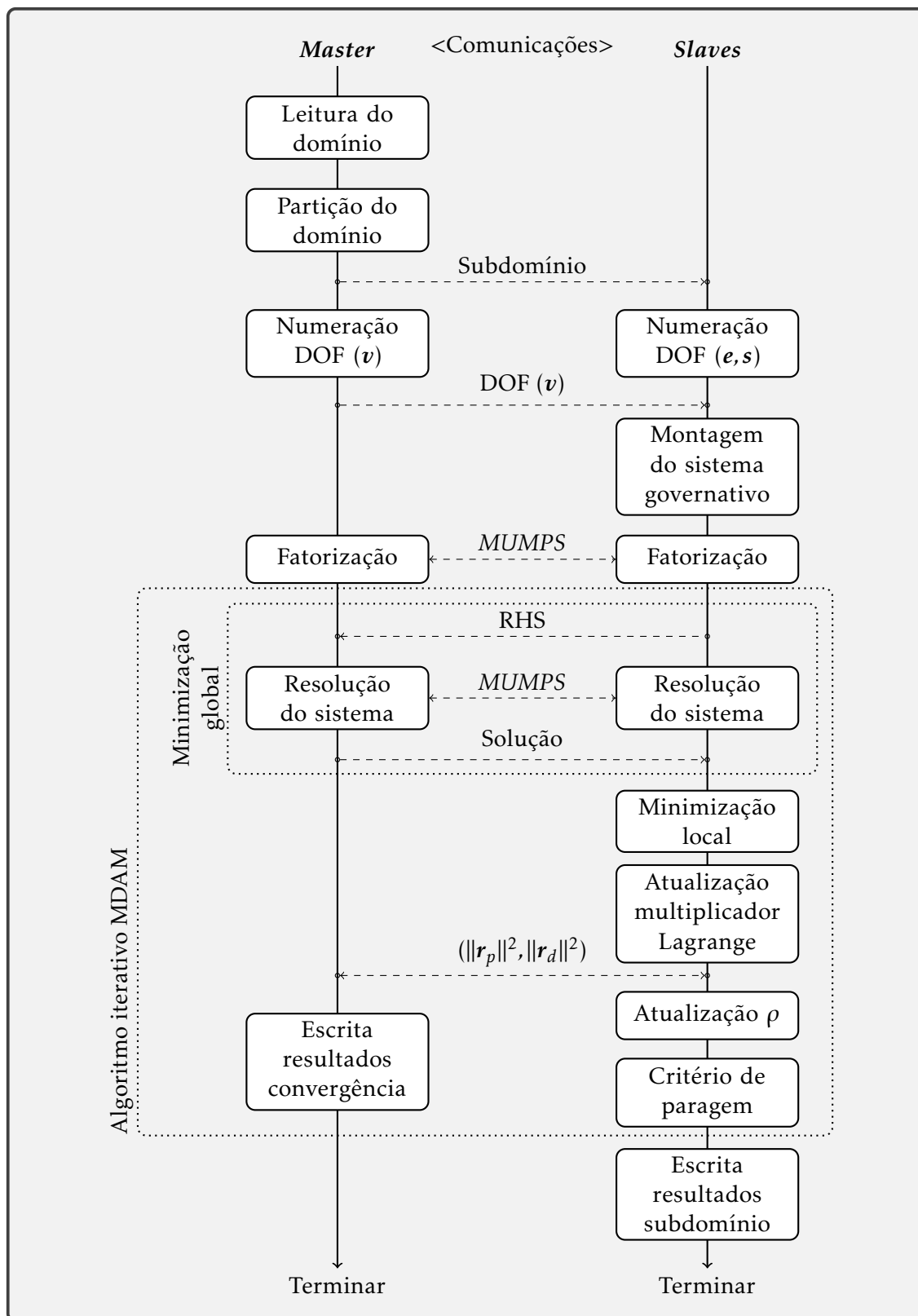


Figura 5.8: Diagrama do algoritmo na vertente paralela

de eliminação descendente e ascendente necessárias para se obter a solução do sistema. Como a ferramenta numérica *MUMPS* permite que o termo independente do sistema de equações (RHS) seja armazenado no processo *Master*, é necessário que em cada iteração, os restantes processos *Slaves* enviem os seus blocos referentes a este vetor para o processo *Master*. Após a solução obtida pelo *MUMPS* é necessário que em cada iteração o processo *Master* volte a distribuir esta informação pelos restantes processos *Slaves*. Como se percebe a fase de minimização global corresponde à etapa que apresenta um maior volume de troca de dados, não só devido ao algoritmo implementado como pela ferramenta numérica *MUMPS*.

A segunda e terceira etapa do algoritmo, designadas respetivamente por minimização local e atualização dos multiplicador de Lagrange, não requerem qualquer alteração em relação à sua vertente sequencial, apresentado assim uma paralelização logarítmica ideal. Por outras palavras, significa que estas etapas podem ser realizadas independentemente para cada subdomínio da malha, não necessitando de qualquer informação dos restantes subdomínios. Assim não é necessária qualquer comunicação inter-processadores para troca de dados, possibilitando a obtenção de uma ótima escalabilidade (capacidade de um algoritmo melhorar a sua performance proporcionalmente ao número de processadores envolvidos nos cálculos).

Contudo, na etapa de atualização do parâmetro de penalidade (ρ), também é necessário existir troca de dados. Os processos *Slaves* enviam para o processo *Master* a norma quadrada dos respetivos resíduos primais e duais referentes ao seus subdomínios, onde o processo *Master* por sua vez, soma a contribuição de cada subdomínio e volta enviar esta informação para os restantes processos *Slaves*. Permitindo assim, que cada processo *Slave* seja capaz de executar de forma semelhante o critério de atualização do parâmetro ρ , bem como executar o critério de paragem.

Como nota, refere-se que o volume de troca de dados é irrelevante, isto é, o tempo dispendido nesta troca de dados corresponde a uma percentagem muito reduzida do tempo total do cálculo.

5.3 Geração da Malha Regular

Nesta secção são apresentados alguns cuidados que temos que ter na geração da malha de elementos finitos regulares, mais precisamente no caso do Teorema Estático da Análise Limite. Em primeiro lugar apresentam-se os casos em que se tem que ter especial atenção, expondo de seguida soluções eficientes que permitem resolver os problemas detetados.

5.3.1 Descontinuidade dos campos de tensão

O primeiro caso ocorre quando existe pelo menos uma carga aplicada de superfície externa (t) que apresenta uma distribuição descontínua (figura 5.9). Originando assim, a

existência de uma zona em que as condições de Neumann são aplicadas de forma descontínua. Como ilustrado na figura 5.9, esta zona designada por P , no caso bidimensional corresponde a um ponto e no caso tridimensional, corresponde a uma linha.

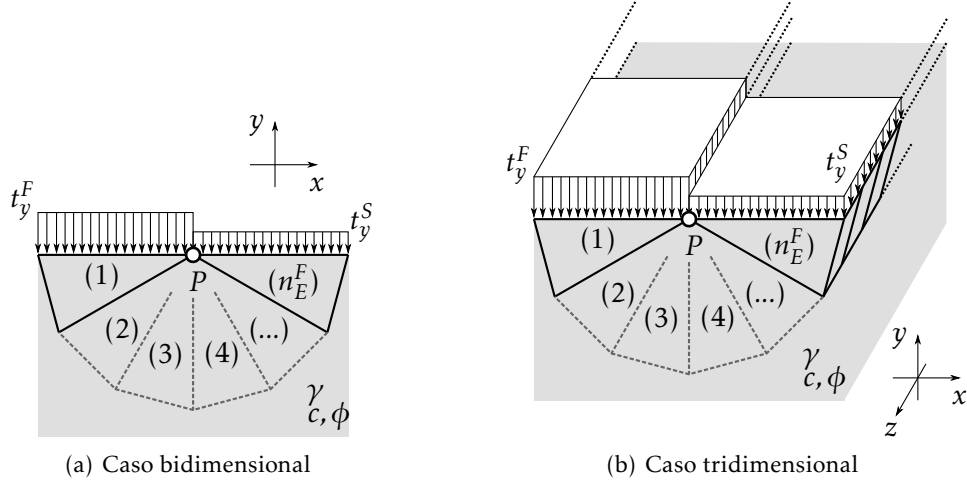


Figura 5.9: Malha na proximidade da zona definida pela descontinuidade das condições de Neumann

Este problema já foi referido por inúmeros autores [22, 81, 106], sendo que a solução encontrada por estes foi a de definir uma malha em forma de leque com inúmeros elementos (n_E^F) em torno da zona descontínua. A não realização desta distribuição de elementos provoca que a estimativa da carga aplicada (t_y^F) na estrutura convirja para zero. Este fenómeno é mais evidente, quanto menor o valor da sobrecarga (t_y^S) e quanto mais o material apresentar um comportamento predominantemente atrítico.

Assim no caso extremo, quando se analisar um problema sem sobrecarga ($t_y^S = 0$) caracterizado por um material puramente atrítico ($c = 0$) é necessário garantir que a malha em forma de leque apresente um maior número de elementos n_E^F , dado que nesta situação, o campo das tensões (comprimido) é definido pela variação mais abrupta. Este facto é constatado pela definição das equações de equilíbrio na fronteira de Neumann, equação (4.52), para as superfícies exteriores,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^{(1)} \\ s_y^{(1)} \\ s_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t_y^F \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} s_x^{(1)} \\ -t_y^F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.64a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^{(n_E^F)} \\ s_y^{(n_E^F)} \\ s_{xy}^{(n_E^F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t_y^S \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{s}^{(n_E^F)} = \begin{bmatrix} s_x^{(n_E^F)} \\ -t_y^S \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.64b)$$

no caso bidimensional, figura 5.9(a), sendo a sua definição para o caso tridimensional,

figura 5.9(b), igualmente fácil de se obter através da equação (4.56),

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^{(1)} \\ s_y^{(1)} \\ s_z^{(1)} \\ s_{xy}^{(1)} \\ s_{yz}^{(1)} \\ s_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t_y^F \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} s_x^{(1)} \\ -t_y^F \\ s_z^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ s_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.65a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^{(n_E^F)} \\ s_y^{(n_E^F)} \\ s_z^{(n_E^F)} \\ s_{xy}^{(n_E^F)} \\ s_{yz}^{(n_E^F)} \\ s_{xz}^{(n_E^F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t_y^S \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{s}^{(n_E^F)} = \begin{bmatrix} s_x^{(n_E^F)} \\ 0 \\ s_z^{(n_E^F)} \\ 0 \\ 0 \\ s_{xz}^{(n_E^F)} \end{bmatrix} \quad (5.65b)$$

Para além disso, devido à consideração de um material puramente atrítico, é necessário que o campo de tensões $\mathbf{s}^{(n_E^F)}$ seja ainda mais restringido para verificar a função de cedência (tabela 2.1). Para o caso 2D, o tensor das tensões dado pela equação (5.64) corresponde basicamente à seguinte expressão,

$$s_x^{(n_E^F)} = 0 \rightarrow \mathbf{s}^{(n_E^F)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.66)$$

por outro lado, para o caso 3D, o tensor das tensões dado pela equação (5.65) corresponde basicamente à seguinte expressão,

$$s_x^{(n_E^F)} = s_z^{(n_E^F)} = s_{xz}^{(n_E^F)} = 0 \rightarrow \mathbf{s}^{(n_E^F)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.67)$$

Logo, percebe-se que de facto este caso particular corresponde ao caso de resolução mais difícil, o que provoca que seja necessário introduzir mais elementos finitos nesta zona de leque, mais concretamente é necessário introduzir mais graus de liberdade de forma a permitir a correta rotação das direções principais até se atingir a magnitude nula.

Na zona de descontinuidade, o tipo de refinamento, para além de se realizar em termos de redução do tamanho do elemento finito também se procede em termos da adição de elementos ao leque da malha.

No caso tridimensional, figura 5.9(b), isto corresponde a adicionar mais prismas triangulares. Definiu-se que estes prismas seriam constituídos pelos tetraedros apresentados na tabela 4.3. Assim cada prisma é definido por catorze tetraedros, onde cada tetraedro é formado por um nó central correspondente ao baricentro do prisma e por três nós posicionados nos vértices da face triangular ou, no caso de se tratar de uma face quadrangular, por dois nós posicionados nos vértices desta face e pelo nó localizado no centroide dessa face, como ilustrado na figura 5.10.

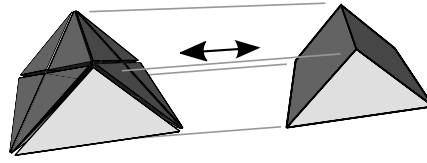


Figura 5.10: Divisão de um prisma em catorze tetraedros

5.3.2 Restrições Linearmente Dependentes

O segundo problema ocorre quando existem restrições linearmente dependentes na matriz $\hat{\mathbf{B}}^T$, que corresponde ao operador discreto generalizado de equilíbrio para o caso do teorema estático da análise limite dado pela expressão (4.50). A detecção e respetiva remoção destas dependências é um processo difícil, contudo é um processo necessário dado que a sua não realização provoca que a matriz $\hat{\mathbf{B}}^T$ seja singular. Neste caso, a solução do processo iterativo irá depender da capacidade do algoritmo encontrar (ou aproximar) a solução do sistema em cada iteração.

A correta remoção de todos os *pivots* nulos do operador discreto generalizado de equilíbrio deve ser realizado aquando da montagem do sistema governativo permitindo assim ganhos em termos de eficiência computacional, para além de provocar que o processo iterativo seja mais estável, mais concretamente, menos suscetível a pequenos erros geométricos. Basicamente, o número total de dependências correspondem ao número total de movimentos de corpo rígido possíveis.

Com base nos trabalhos de [87], descreve-se para o caso de problemas bidimensionais, um método que permite detetar e remover as condições de equilíbrio linearmente dependentes na matriz $\hat{\mathbf{B}}^T$.

O primeiro passo do método corresponde em identificar as condições geométricas necessárias que provocam o surgimento de restrições linearmente dependentes. Observando atentamente o processo de montagem da equação (4.50) percebe-se que as restrições lineares apenas poderão surgir no operador discreto de equilíbrio nas fronteiras $N^{(i)}$. Mais concretamente, entre fronteiras que partilham o mesmo nó.

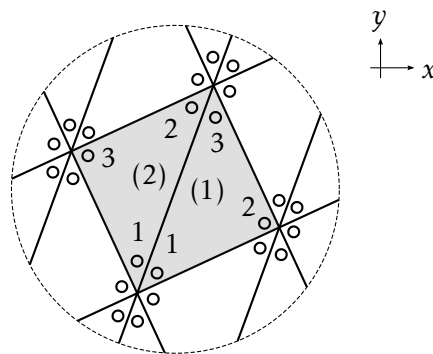


Figura 5.11: Malha genérica

Estes factos são facilmente constatados pela simples montagem do operador $\hat{\mathbf{B}}^T$ para

dois elementos adjacentes de uma malha genérica representada na figura 5.11. Obtendo-se neste caso,

$$\hat{B}^T = \begin{bmatrix} -D\phi_1^{(1)} & -D\phi_2^{(1)} & -D\phi_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D\phi_1^{(2)} & -D\phi_2^{(2)} & -D\phi_3^{(2)} \\ n_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{31}^{(1)} & 0 & n_{12}^{(2)} & 0 \\ n_{31}^{(1)} & 0 & 0 & n_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & n_{31}^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Assim, considerando que a malha não apresenta elementos degenerados (com área nula), não é possível existir combinação linear entre os operadores discretos de equilíbrio no elemento $(-D\phi^{(i)})$ e os operadores discretos de equilíbrio nas fronteiras e também nunca pode existir combinação linear entre os operadores discretos de equilíbrio nas fronteiras que não partilhem o mesmo nó.

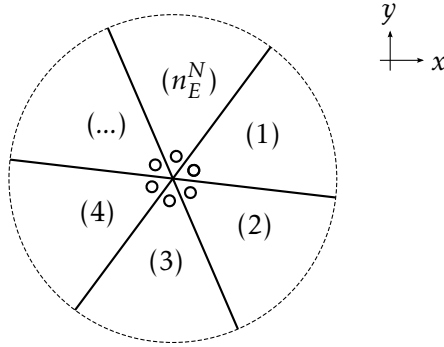


Figura 5.12: Malha definida por n_E^N elementos que confluem num nó interior

Define-se de seguida o operador discreto de equilíbrio nas fronteiras para o caso de um nó interior ser partilhado por n_E^N elementos finitos, representado na figura 5.12. Esta definição será feita considerando que a matriz do vetor normal exterior normalizado definida pelos nós $j-l$ (4.54) é definida por dois blocos,

$$n_{jl}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{jl} & 0 & \cos \theta_{jl} \\ 0 & \cos \theta_{jl} & \sin \theta_{jl} \end{bmatrix}^{(i)} = [n_{D_{jl}}^{(i)} \quad n_{V_{jl}}^{(i)}] \quad (5.69)$$

sendo separado na sua componente diagonal ($n_{D_{jl}}^{(i)}$) e vetorial ($n_{V_{jl}}^{(i)}$),

$$n_{D_{jl}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{jl} & 0 \\ 0 & \cos \theta_{jl} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (5.70)$$

$$\mathbf{n}_{V_{jl}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{jl} \\ \sin \theta_{jl} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (5.71)$$

onde θ_{jl} corresponde ao ângulo de inclinação da aresta definida pelos nós $j-l$.

Esta mudança permite por conveniência a separação das componentes de corte (s_{xy}) das restante componentes (s_x, s_y) e por outro lado, permite que a matriz do vetor normal da fronteira definida pelos índices dos nós, passasse a ser definida pelos índices dos elementos que pertencem a esta fronteira ($\mathbf{n}_{jl}^{(i)} \rightarrow \mathbf{n}^{(i_1, i_2)}$). Tendo como base estas ideias, o operador discreto para o caso da figura 5.12 assume a seguinte forma,

$$N = \begin{bmatrix} n_D^{(1,2)} & -n_D^{(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_D^{(2,3)} & -n_D^{(2,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_D^{(3,4)} & -n_D^{(3,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_D^{(4,...)} & -n_D^{(4,...)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_D^{(...,n_E^N)} & -n_D^{(...,n_E^N)} \\ n_D^{(n_E^N,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_D^{(n_E^N,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_V^{(1,2)} & -n_V^{(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_V^{(2,3)} & -n_V^{(2,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_V^{(3,4)} & -n_V^{(3,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_V^{(4,...)} & -n_V^{(4,...)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_V^{(...,n_E^N)} & -n_V^{(...,n_E^N)} \\ n_V^{(n_E^N,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_V^{(n_E^N,1)} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Aplica-se de seguida a eliminação de Gauss a esta matriz (5.72). Assim, inicia-se pela multiplicação da primeira linha-matriz por $-n_D^{(n_E^N,1)} (n_D^{(1,2)})^{-1}$ e depois soma-se este resultado à última linha-matriz, obtendo-se,

$$N = \begin{bmatrix} n_D^{(1,2)} & -n_D^{(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_D^{(2,3)} & -n_D^{(2,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_D^{(3,4)} & -n_D^{(3,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_D^{(4,...)} & -n_D^{(4,...)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_D^{(...,n_E^N)} & -n_D^{(...,n_E^N)} \\ 0 & n_D^{(n_E^N,1)} & 0 & 0 & 0 & -n_D^{(n_E^N,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_V^{(1,2)} & -n_V^{(1,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_V^{(2,3)} & -n_V^{(2,3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_V^{(3,4)} & -n_V^{(3,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_V^{(4,...)} & -n_V^{(4,...)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_V^{(...,n_E^N)} & -n_V^{(...,n_E^N)} \\ n_V^{(n_E^N,1)} - n_D^{(n_E^N,1)} n_T^{(1,2)} & n_D^{(n_E^N,1)} n_T^{(1,2)} & 0 & 0 & 0 & -n_V^{(n_E^N,1)} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

sendo, \mathbf{n}_T , a componente tangencial do vetor normal exterior normalizado, obtida através da seguinte equação,

$$\mathbf{n}_T^{(1,2)} = \left(\mathbf{n}_D^{(1,2)} \right)^{-1} \mathbf{n}_V^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \theta^{(1,2)} \\ \tan \theta^{(1,2)} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Repete-se sucessivamente este processo para as restantes linhas-matrizes, até que o primeiro bloco da última linha-matriz seja todo definido por zeros. Por simplificação, multiplica-se esta última linha-matriz por $\left(\mathbf{n}_D^{(n_E^N,1)} \right)^{-1}$ obtendo-se o seguinte resultado,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n}_T^{(n_E^N,1)} - \mathbf{n}_T^{(1,2)} & \mathbf{n}_T^{(1,2)} - \mathbf{n}_T^{(2,3)} & \mathbf{n}_T^{(2,3)} - \mathbf{n}_T^{(3,4)} & \mathbf{n}_T^{(3,4)} - \mathbf{n}_T^{(4,...)} \\ & \mathbf{n}_T^{(4,...)} - \mathbf{n}_T^{(...,n_E^N)} & \mathbf{n}_T^{(...,n_E^N)} - \mathbf{n}_T^{(n_E^N,1)} & & \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Pela expressão (5.74) constata-se que é impossível que ambas as linhas da submatriz (5.75) sejam nulas. Contudo, para existir um *pivot* nulo é necessário que as linhas da submatriz sejam proporcionais por meio de uma *constante*. Concluiu-se então que para haver uma dependência linear num nó interior é necessário que se verifiquem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \tan \theta^{(n_E^N,1)} \tan \theta^{(1,2)} &= \tan \theta^{(1,2)} \tan \theta^{(2,3)} = \tan \theta^{(2,3)} \tan \theta^{(3,4)} = \\ \tan \theta^{(3,4)} \tan \theta^{(4,...)} &= \tan \theta^{(4,...)} \tan \theta^{(...,n_E^N)} = \tan \theta^{(...,n_E^N)} \tan \theta^{(n_E^N,1)} = \text{constante} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Logo, esta condição apenas se verifica quando:

$$n_E^N = 4; \quad |\theta^{(4,1)} - \theta^{(2,3)}| = \pi; \quad |\theta^{(1,2)} - \theta^{(3,4)}| = \pi \quad (5.77)$$

No caso de se tratar de um nó exterior partilhado por n_E^N elementos finitos, representado na figura 5.13, o raciocínio é análogo ao apresentado anteriormente, equação (5.72) à equação (5.75). Contudo, neste caso a ligação que une o elemento n_E^N ao elemento 1 é dividida em duas, isto é, perde-se a ligação de fecho entre as fronteiras.

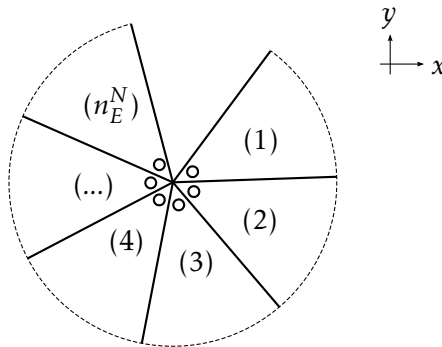


Figura 5.13: Malha definida por n_E^N elementos que confluem num nó exterior

Assim, para haver uma dependência linear num nó exterior é necessário que se verifiquem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \tan \theta^{(1)} \tan \theta^{(1,2)} &= \tan \theta^{(1,2)} \tan \theta^{(2,3)} = \tan \theta^{(2,3)} \tan \theta^{(3,4)} = \\ \tan \theta^{(3,4)} \tan \theta^{(4,...)} &= \tan \theta^{(4,...)} \tan \theta^{(...,n_E^N)} = \tan \theta^{(...,n_E^N)} \tan \theta^{(n_E^N)} = \text{constante} \end{aligned} \quad (5.78)$$

Logo, percebe-se que esta restrição é muito menos restritiva do que a referente ao nó interior, restrição (5.76). Neste caso, a condição verifica-se quando:

$$n_E^N = 1 \quad (5.79a)$$

$$n_E^N = 2; \quad |\theta^{(1)} - \theta^{(2)}| = \pi \quad (5.79b)$$

$$n_E^N = 3; \quad |\theta^{(1)} - \theta^{(2,3)}| = \pi; \quad |\theta^{(1,2)} - \theta^{(3)}| = \pi \quad (5.79c)$$

Depois de detetadas as condições geométricas que provocam o surgimento de restrições linearmente dependentes, segue-se o modo de remover corretamente estas restrições, isto é, qual a condição de equilíbrio inter-elemento que deve ser omitida da assemblagem do operador discreto de equilíbrio nas fronteiras.

Para se executar este passo, em primeiro lugar procede-se à conversão do equilíbrio global (x, y) para o equilíbrio local (n, t) . Assim a matriz do vetor normal exterior normalizado (5.69) passa a ser definida da seguinte forma,

$$\mathbf{n}^{(i_1, i_2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_n \\ \mathbf{n}_t \end{bmatrix}^{(i_1, i_2)} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta^{(i_1, i_2)} & \cos^2 \theta^{(i_1, i_2)} & 2 \sin \theta^{(i_1, i_2)} \cos \theta^{(i_1, i_2)} \\ -\sin \theta^{(i_1, i_2)} \cos \theta^{(i_1, i_2)} & \sin \theta^{(i_1, i_2)} \cos \theta^{(i_1, i_2)} & \sin^2 \theta^{(i_1, i_2)} - \cos^2 \theta^{(i_1, i_2)} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

onde \mathbf{n}_n armazena as componentes na direção normal do vetor normal exterior normalizado e \mathbf{n}_t armazena as componentes na direção tangente do vetor normal exterior normalizado.

Especifica-se de seguida, o operador discreto de equilíbrio nas fronteiras para o caso de um nó interior ser partilhado por quatro elementos finitos, condição (5.77), representado na figura 5.14.

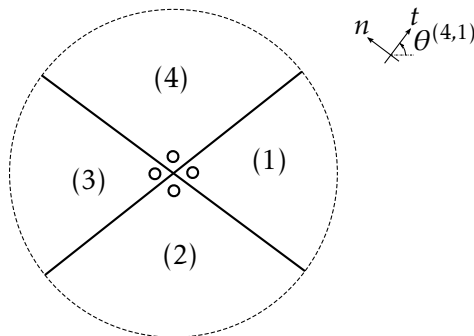


Figura 5.14: Malha definida por $n_E^N = 4$ elementos que confluem num nó interior (onde existe uma dependência linear)

O operador discreto para este caso assume então o seguinte aspeto,

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1,2)} & -\mathbf{n}^{(1,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}^{(2,3)} & -\mathbf{n}^{(2,3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}^{(3,4)} & -\mathbf{n}^{(3,4)} \\ \mathbf{n}^{(4,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^{(4,1)} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Através de [134], percebe-se que o operador N com dimensões 8×12 , equação (5.81), apresenta dependências lineares, se e apenas se, existir um vetor $\hat{\mathbf{v}}$ não nulo que verifique,

$$N^T \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (5.82)$$

Sendo igualmente válida esta equação (5.82) para qualquer sub-matriz de N^T de dimensões 8×8 . Logo, para verificar a existência de dependências lineares basta verificar que todas as sub-matrizes possíveis de N^T apresentam determinante nulo. Contudo as sub-matrizes possíveis são reduzidas às sub-matrizes sequenciais dado que as restantes sub-matrizes são obtidas por combinações destas.

Testa-se em primeiro lugar se a dependência linear na matriz N deve-se à componente normal de uma das fronteiras. Para isso, remove-se a primeira equação da primeira linha-matriz do operador (5.81), isto é, remove-se o equilíbrio na direção normal da fronteira partilhada pelos elementos 1 e 2. Calculando os diversos determinantes das sub-matrizes (doze no total), chega-se à conclusão que através da remoção desta componente a dependência se mantém, devido ao determinante de todas as sub-matrizes ser nulo.

De seguida, testa-se se a dependência linear na matriz N se deve à componente tangencial de uma das fronteiras. Para isso, remove-se a segunda equação da primeira linha-matriz do operador (5.81), isto é, remove-se o equilíbrio na direção tangencial da fronteira partilhada pelos elementos 1 e 2. Calculando novamente os diversos determinantes das sub-matrizes (doze no total), chega-se à conclusão que através da remoção desta componente a dependência desaparece devido ao determinante de uma das sub-matrizes ser diferente de zero.

Na tabela 5.1, são apresentadas estas conclusões, isto é, são apresentadas as geometrias nodais que provocam a existência de dependências lineares do operador N , caso se trate de um nó interior, bem como se define a equação que deve ser retirada deste operador de forma a não existir a dependência linear.

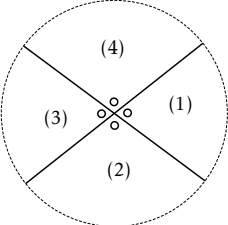
Seguindo o mesmo raciocínio, especifica-se o operador discreto de equilíbrio nas fronteiras para o caso de um nó exterior ser partilhado por apenas um elemento finito, condição (5.79a), representado na figura 5.15.

O operador discreto para este caso assume então o seguinte aspeto,

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{superior}^{(1)} \\ \mathbf{n}_{inferior}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Logo, o operador N com dimensões 4×3 apresenta dependências lineares caso exista um vetor $\hat{\mathbf{v}}$ não nulo que verifique a equação (5.82). Sendo igualmente válida esta equação

Tabela 5.1: Condição/Geometria para detetar e remover a dependência linear do operador N no caso bidimensional para nó interior

n_E^N	Condição detetar dependência	Condição remover dependência
4		$n_t^{(1)}$
	$ \theta^{(4,1)} - \theta^{(2,3)} = \pi; \quad \theta^{(1,2)} - \theta^{(3,4)} = \pi$	

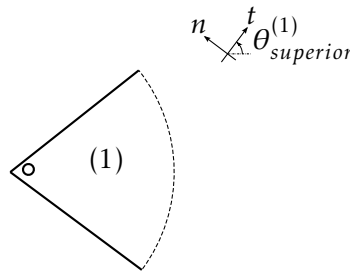
para qualquer sub-matriz de N^T de dimensões 3×3 . Logo, para verificar a existência de dependências lineares basta verificar para todas as sub-matrizes possíveis de N^T que o seu determinante seja nulo. Contudo as sub-matrizes possíveis são reduzidas às sub-matrizes sequenciais porque as restantes sub-matrizes são obtidas por combinações destas.

Testa-se em primeiro lugar se a dependência linear na matriz N se deve à componente tangencial de uma das fronteiras. Para isso, remove-se a segunda equação da primeira linha-matriz do operador (5.83), isto é, remove-se o equilíbrio na direção tangencial da fronteira superior referente ao elemento 1. Como a matriz N resultante é quadrada 3×3 apenas é necessário obter um determinante. Este determinante é definido pela seguinte expressão,

$$\det = -\sin^2 \left(\theta_{superior}^{(1)} - \theta_{inferior}^{(1)} \right) \quad (5.84)$$

Percebe-se rapidamente que este determinante (5.84) é sempre diferente de zero, logo este tipo de procedimento permite remover corretamente a dependência existente no operador (5.83).

De seguida, testa-se se a dependência linear na matriz N (5.83) também se pode dever à componente normal de uma das fronteiras. Para isso, remove-se a primeira equação da primeira linha-matriz do operador (5.83), isto é, remove-se o equilíbrio na direção normal


 Figura 5.15: Malha definida por $n_E^N = 1$ elementos que confluem num nó exterior (onde existe uma dependência linear)

da fronteira superior referente ao elemento 1. Como a matriz N resultante é quadrada 3×3 apenas é necessário obter um determinante, que se obtém pela seguinte equação,

$$\det = \frac{\sin\left(2\theta_{superior}^{(1)} - 2\theta_{inferior}^{(1)}\right)}{2} \quad (5.85)$$

Este determinante apenas assume o valor nulo (não existe a perda dependência) quando se verificar a seguinte relação,

$$|\theta_{superior}^{(1)} - \theta_{inferior}^{(1)}| = \frac{\pi}{2} \quad (5.86)$$

Assim, também se pretende perceber para este caso, quando se verifica a equação (5.86), como é que se procede à remoção correta desta dependência. Testa-se então a remoção do equilíbrio na direção normal da fronteira inferior referente ao elemento 1, que corresponde à primeira equação da segunda linha-matriz do operador (5.83). Como a matriz N resultante tem agora dimensões 2×3 , é necessário calcular três determinantes referentes ao conjunto de sub-matrizes possíveis. Os determinantes obtidos ou apresentam o valor nulo ou são proporcionais ao determinante obtido pela expressão (5.85). Significa assim que esta remoção não permitiu a remoção da dependência. De seguida, testa-se a remoção do equilíbrio na direção tangencial da fronteira superior referente ao elemento 1, que corresponde à segunda equação da primeira linha-matriz do operador (5.83). Como a matriz N resultante é definida igualmente pelas dimensões 2×3 , é necessário calcular três determinantes referentes ao conjunto de sub-matrizes possíveis. Os determinantes obtidos apresentam as seguintes expressões,

$$\det = \frac{\sin\left(2\theta_{inferior}^{(1)}\right)}{2} \quad (5.87a)$$

$$\det = -\cos^2\left(2\theta_{inferior}^{(1)}\right) \quad (5.87b)$$

$$\det = -\sin^2\left(2\theta_{inferior}^{(1)}\right) \quad (5.87c)$$

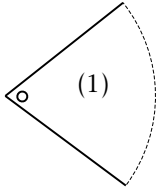

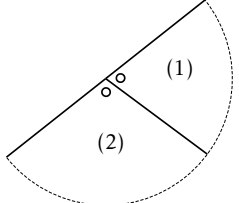
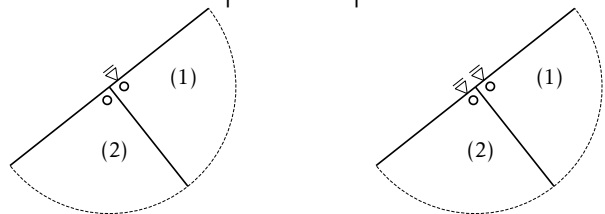
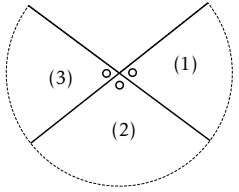
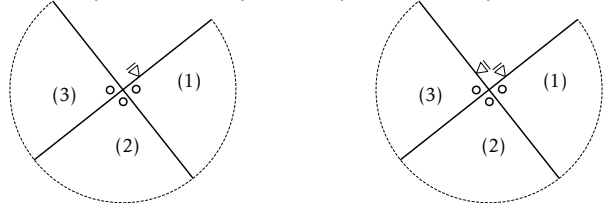
Logo, as últimas duas equações não podem ser nulas ao mesmo tempo, assim os vetores da matriz N são linearmente independentes o que provoca a perda da dependência linear.

Aplicando o mesmo procedimento, apresentado anteriormente, para as restantes condições (5.79), obtêm-se conclusões semelhantes, que são esquematizados na tabela 5.2. Nesta tabela são apresentadas as geometrias nodais (com ou sem apoios) que provocam a existência de dependências lineares do operador N , caso se trate de um nó exterior, bem como se define a equação que deve ser retirada deste operador de forma a não existir a dependência linear.

Pelas geometrias apresentadas nas tabelas 5.1 e 5.2, percebe-se que as dependências surgem principalmente em malhas estruturadas, logo para malhas não estruturadas é improvável que surjam qualquer dependências pelo menos em nós interiores.

Em suma, para remover a introdução de condições linearmente dependentes no operador N existem duas maneiras possíveis.

Tabela 5.2: Condição/Geometria para detetar e remover a dependência linear do operador N no caso bidimensional para nó exterior

n_E^N	Condição detetar dependência	Condição remover dependência
1	  $ \theta_{superior}^{(1)} - \theta_{inferior}^{(1)} = \frac{\pi}{2}$	$\mathbf{n}_{t_{superior}}^{(1)}$
2	 $ \theta^{(1)} - \theta^{(2)} = \pi$  $ \theta^{(1)} - \theta^{(2)} = \pi; \quad \theta^{(1)} - \theta^{(1,2)} = \frac{\pi}{2}$	$\mathbf{n}_t^{(1)}$
3	 $ \theta^{(1)} - \theta^{(2,3)} = \pi; \quad \theta^{(1,2)} - \theta^{(3)} = \pi$  $ \theta^{(1)} - \theta^{(2,3)} = \pi; \quad \theta^{(1,2)} - \theta^{(3)} = \pi; \quad \theta^{(1)} - \theta^{(1,2)} = \frac{\pi}{2}$	$\mathbf{n}_t^{(1)}$

No primeiro caso, procede-se à montagem do operador N percorrendo sequencialmente todos os nós da malha. Em cada nó, é testado se alguma das condições presentes nas tabelas 5.1 e 5.2 se verifica. Em caso afirmativo, existe uma dependência linear nesse nó, sendo necessário proceder à sua remoção. Esta ação é alcançada através da dispensa da componente n_t especificada nas tabelas 5.1 e 5.2. A extensão desta hipótese para o caso tridimensional leva a um aumento de complexidade, principalmente na definição das condições que permitem detetar e remover as condições linearmente dependentes do operador N .

No segundo caso, pode utilizar-se a ferramenta numérica *MUMPS*, esta ferramenta numérica permite detetar e remover as dependências existentes numa matriz através da definição de uma tolerância para o zero numérico. A possível limitação desta hipótese corresponde à definição desta tolerância, que permite detetar um *pivot* nulo. Contudo, os diversos cálculos realizados permitem afirmar que esta hipótese tem um bom desempenho. Sendo esta a razão pela qual, esta é a hipótese correntemente utilizada na resolução de problemas bidimensionais e tridimensionais.

5.4 Geração de Elementos de Extensão

Os aspetos teóricos dos elementos de extensão que permitem simular o domínio (semi-) infinito foram apresentados anteriormente nas secções 4.3.2.1 e 4.4.2.1. Na presente secção apresenta-se o processo de geração dos elementos de extensão que se pretende que seja executado de uma forma automática e eficiente.

O processo de geração dos elementos de extensão para o caso bidimensional foi implementada segundo dois métodos diferentes.

O primeiro método, figura 5.16, inicia-se pela criação dos elementos do tipo unidirecional, $(i)_1$, definidos na tabela 4.10, em todas arestas de extensão. Definiu-se que uma aresta era de extensão, caso não apresentasse nenhuma restrição ao campo das tensões. Como cada elemento do tipo 1 apresenta a forma de um paralelograma, cada aresta de extensão será estendida ao longo da sua direção perpendicular (normalizada). Após a criação de todos os elementos do tipo unidirecional, poderão continuar a existir vazios no campo das tensões na zona de extensão. Estes vazios são facilmente identificados através da deteção de aberturas entre elementos do tipo unidirecional ou entre estes elementos e a direção da aresta de fronteira correspondente. Sendo estas aberturas preenchidas por elementos de extensão do tipo bidirecional, $(i)_2$, presentes na tabela 4.10, que apresentam a forma de um triângulo.

O segundo método, figura 5.17, inicia-se pela determinação da origem da criação dos elementos de extensão, O . Este ponto é basicamente determinado através da interseção das arestas de fronteira que ligam com as fronteiras de extensão. Quando não é possível determinar este ponto, o processo de geração dos elementos de extensão segue a ideia das normais, mencionadas no primeiro método apresentado. Após a determinação deste

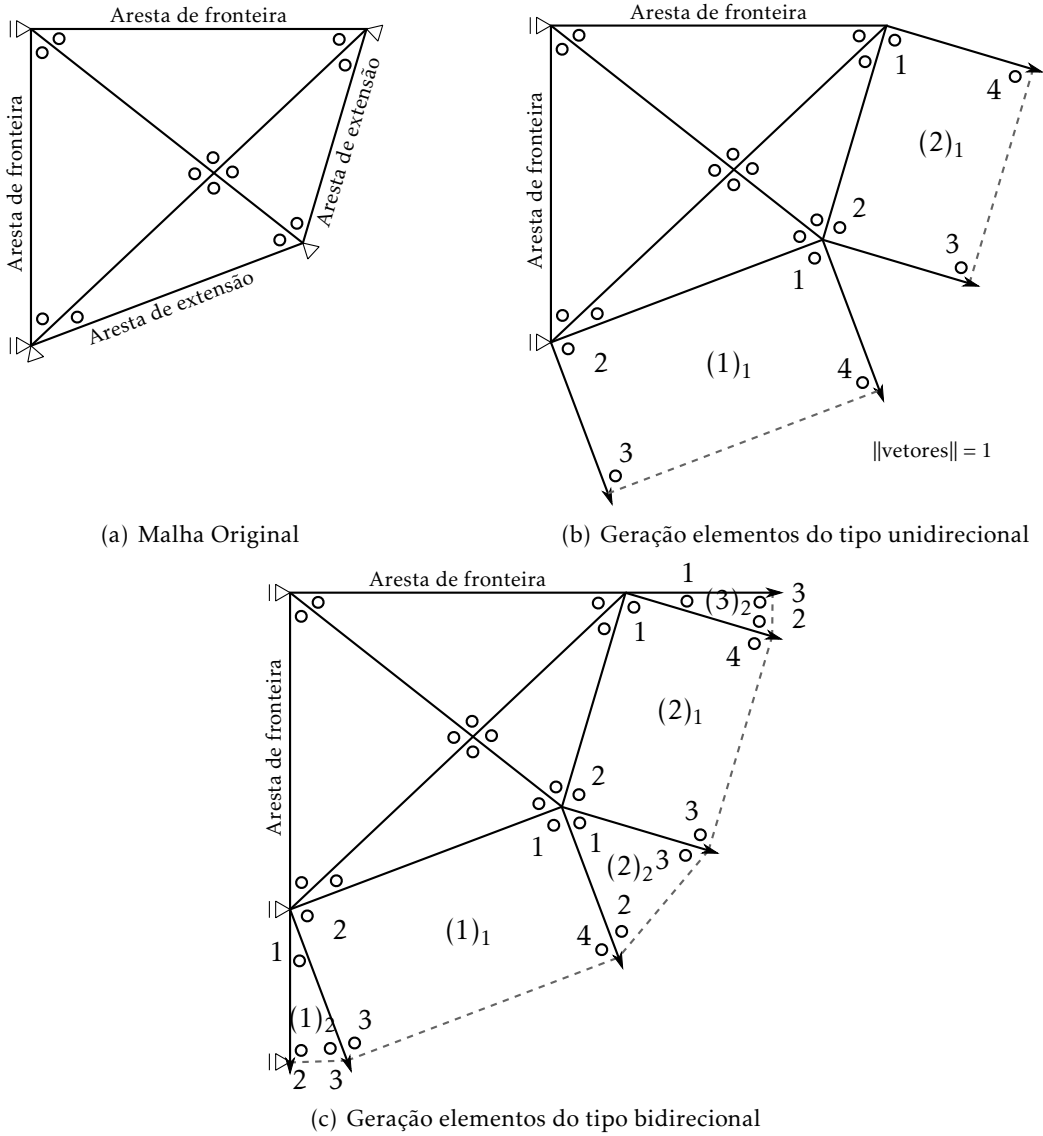


Figura 5.16: Primeiro método de geração dos elementos de extensão no caso 2D

ponto, criam-se os elementos do tipo unidirecional, $(i)_1$, definidos na tabela 4.10, provenientes de cada aresta de extensão. Como cada elemento do tipo 1 apresenta a forma de um paralelograma, cada aresta de extensão será estendida ao longo de uma única direção. Esta direção é definida pelo vetor formado pelo nó de origem O e o centro geométrico da aresta de extensão. A norma considerada para esta direção de extensão equivale à média dos comprimentos das arestas de extensão. Após a criação de todos os elementos do tipo unidirecional, poderão continuar a existir vazios no campo das tensões na zona de extensão. Estes vazios são preenchidos da mesma forma que no primeiro método (definido anteriormente).

Em ambos os métodos, as condições de fronteira do domínio semi-infinito são transferidas para as arestas que se encontram nas extremidades. Nestes métodos, a geração dos elementos de extensão do tipo unidirecional e bidirecional foi executada segundo a

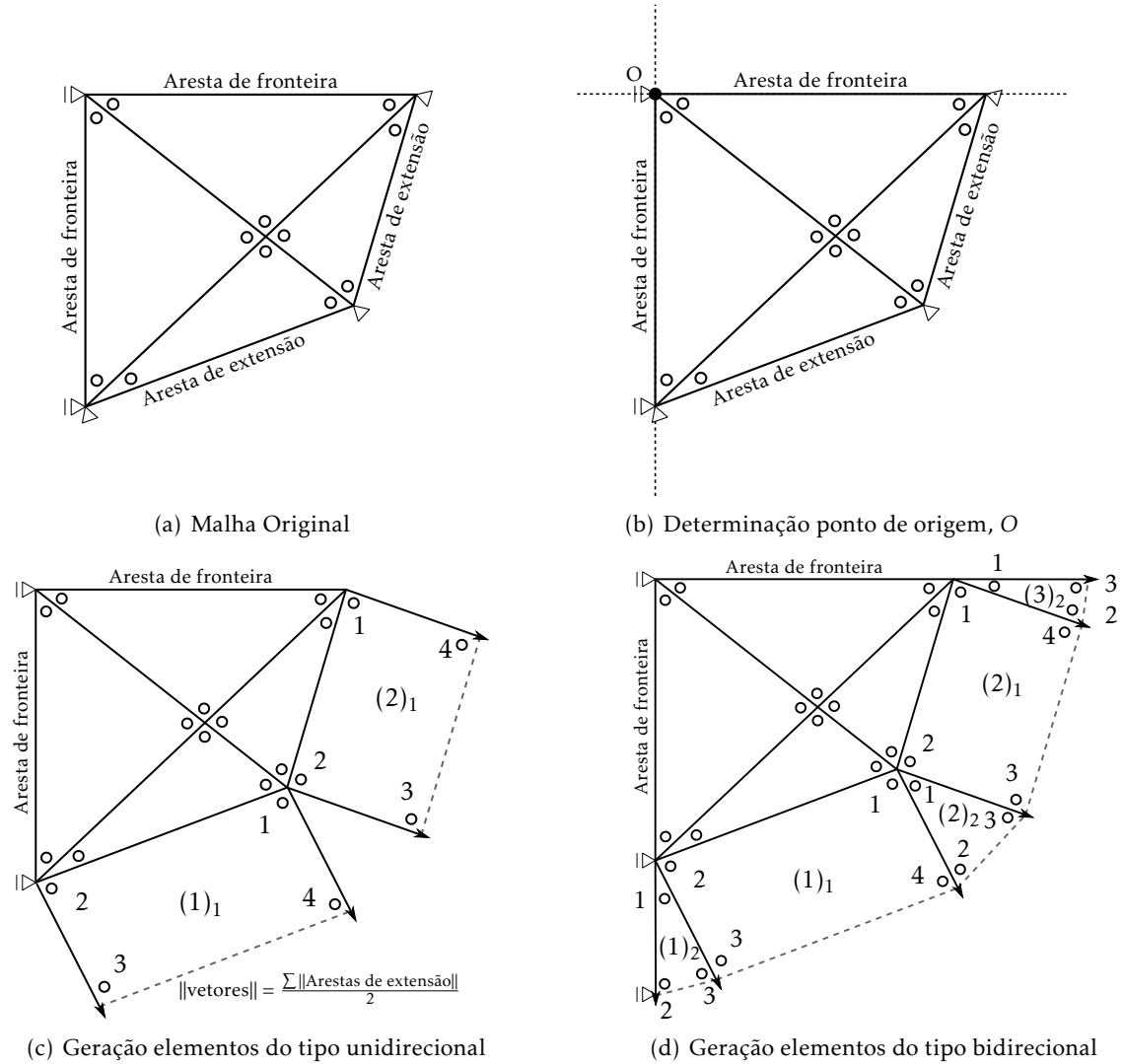


Figura 5.17: Segundo método de geração dos elementos de extensão no caso 2D

orientação dos nós apresentada na tabela 4.6, de forma a que a área de cada elemento de extensão seja positiva e para que as condições do equilíbrio no domínio e nas fronteiras e a condição da função de cedência sejam corretamente aplicadas.

A diferença principal entre os dois métodos reside sobretudo na existência de um elemento do tipo bidirecional entre cada dois elementos do tipo unidirecional, fornecendo assim ao problema mais graus de liberdade.

No caso tridimensional, o processo de geração dos elementos de extensão segue basicamente o mesmo raciocínio que o apresentado no caso bidimensional. No entanto, apenas se encontra implementada a primeira vertente do método, estando em fase de implementação a segunda vertente do método. A primeira vertente do método, figura 5.18, inicia-se pela criação dos elementos do tipo unidirecional, $(i)_1$, definidos na tabela 4.10, em todas as faces de extensão. Como cada elemento do tipo 1 apresenta a forma de um prisma triangular, cada face de extensão será estendida ao longo da sua direção

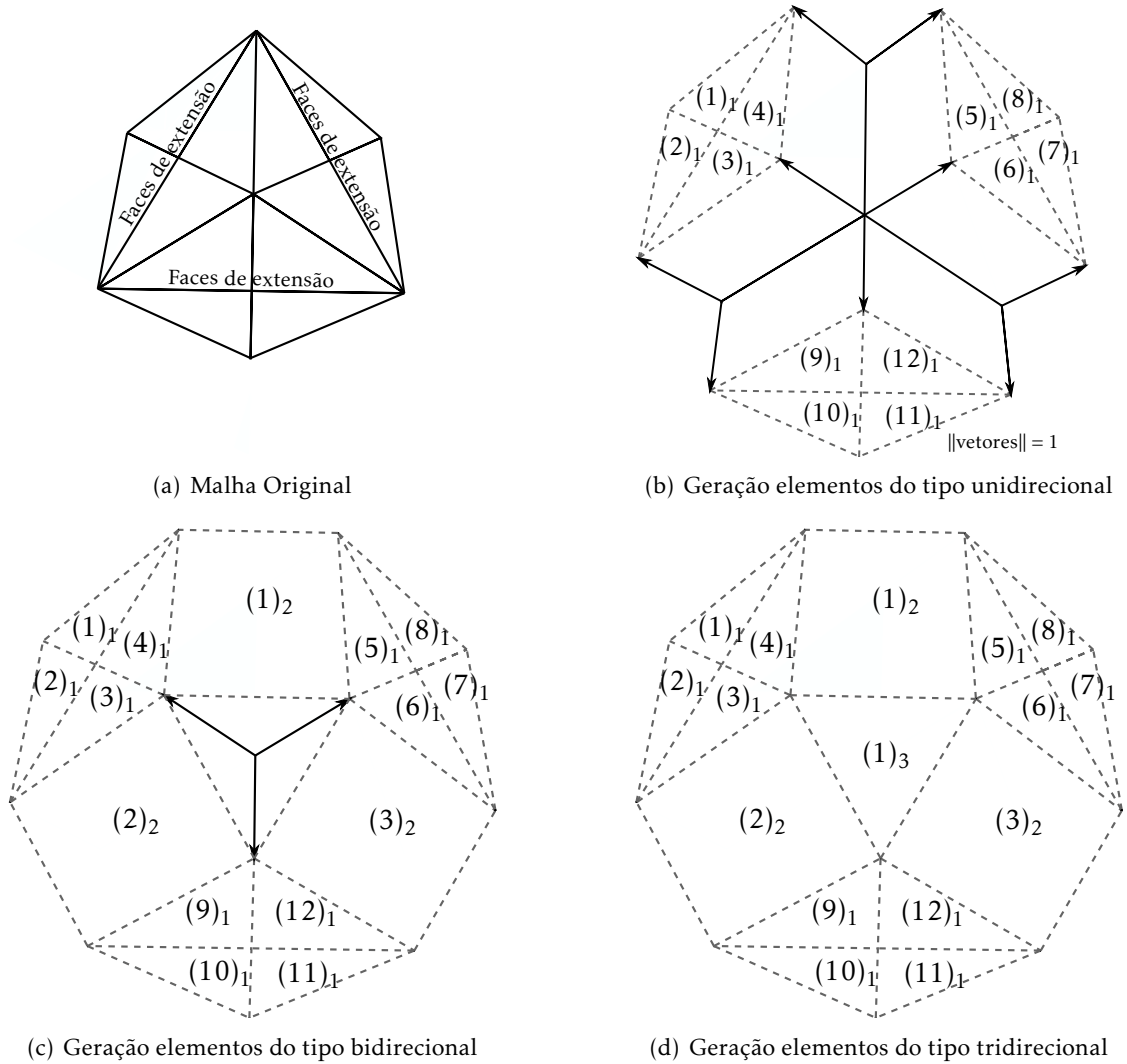


Figura 5.18: Método de geração dos elementos de extensão no caso 3D

perpendicular (normalizada). Após a criação de todos os elementos do tipo unidirecional, poderão continuar a existir vazios no campo das tensões na zona de extensão. Estes vazios são facilmente identificados através da detecção de aberturas entre elementos do tipo unidirecional ou entre estes elementos e o setor de extensão. Estas aberturas podem ser definidas por arestas de extensão ou por nós de extensão. Em primeiro lugar tratam-se das aberturas devido à existência de uma aresta de extensão, procedendo-se ao seu preenchimento por elementos de extensão do tipo bidirecional, $(i)_2$, presentes na tabela 4.10. Os elementos do tipo bidirecional são definidos pela mesma forma que os elementos do tipo unidirecional (prisma triangular). Em segundo e último lugar, tratam-se das aberturas devido à existência de um nó de extensão, procedendo-se ao seu preenchimento por elementos de extensão do tipo tridirecional, $(i)_3$, presentes na tabela 4.10. Os elementos do tipo tridirecional, apresentam a forma de um tetraedro.

As condições de fronteira do domínio semi-infinito, neste caso, são transferidas para as faces que se encontram nas extremidades. Neste método, a geração dos elementos de extensão do tipo unidirecional, bidirecional e tridirecional foi executada segundo a orientação dos nós apresentada na tabela 4.6 de forma a que o volume de cada elemento de extensão seja positivo e para que as condições do equilíbrio no domínio e nas fronteiras e a condição da função de cedência sejam corretamente aplicadas.

Capítulo 6

Exemplos Numéricos

6.1 Introdução

O algoritmo unificado proposto, cujos aspetos da implementação foram descritos em detalhe no capítulo 5, permite a obtenção de estimativas estritamente inferiores e superiores da carga de colapso para problemas bidimensionais e tridimensionais, recorrendo para isso, ao Teorema Estático e ao Teorema Cinemático da Análise Limite, respetivamente.

Neste capítulo pretende-se em primeiro lugar, validar o algoritmo unificado proposto através do estudo de exemplos em que a solução analítica é conhecida.

Posteriormente, pretende-se aferir a capacidade do algoritmo quando comparado com outros algoritmos existentes na literatura. Neste caso a escolha dos problemas analisados incidiu sobretudo em problemas no domínio da Engenharia Civil mais concretamente na sua vertente geotécnica (campo das obras geotécnicas), destacando-se nesta área, os problemas da determinação de impulsos de terra [136, 10, 11], da análise da estabilidade de taludes [73, 99, 98], da determinação da capacidade resistente de fundações superficiais [58, 81, 8] e da estabilidade de túneis [102, 158, 103] (mencionando-se para cada um destes problemas alguns exemplos de referências). Dos problemas tratados com recurso à Análise Limite fora do âmbito da geotecnia destacam-se:

- . **Cálculo da capacidade resistente de peças de betão armado** - Apesar de o betão apresentar um comportamento frágil, a introdução de armaduras de aço confere a este problema uma ductilidade significativa, permitindo a sua análise pelos princípios da Análise limite [110, 71];
- . **Cálculo da capacidade resistente de estruturas metálicas** - O aço corresponde ao material estrutural que mais se adequa à análise limite devido ao seu comportamento perfeitamente plástico. Contudo como referido na secção 2.8, este tipo de estruturas estão sujeitas a efeitos de 2ª ordem devido à sua esbelteza. Porém, no estudo de pormenores de ligações soldadas [151], ou aparafusadas [3], ou com cunha de articulação [117], a utilização da análise limite apresenta ótimos resultados;

- . **Análise de estruturas de alvenaria não reforçada** - Este problema é definido por um material compósito (unidades e argamassa) que se define como anisotrópico. Embora em muitas situações apresente um comportamento frágil, dependendo do carregamento surgem situações em que o seu comportamento apresenta uma ductilidade considerável [31, 43].

6.2 Problemas bidimensionais

De forma a validar o critério de Tresca (ou de von Mises) e de Mohr-Coulomb (ou de Drucker-Prager) num problema bidimensional de domínio finito, optou-se pelo estudo do problema do bloco esmagado [130, 113] e do problema do cilindro oco sob pressão interna [57, 29] em condições de deformação plana. Para validar a implementação numérica dos elementos de extensão bidimensionais, que permitem simular um domínio (semi-)infinito, optou-se pelo estudo do problema da capacidade de carga de fundações superficiais corridas em deformação plana.

Para aferir a capacidade e versatilidade bidimensional do algoritmo proposto quando comparado com os algoritmos existentes na literatura, recorreu-se ao estudo do problema de impulsos de terra em deformação plana.

Todos os cálculos bidimensionais foram realizados de um modo sequencial num servidor dedicado, equipado com um Intel Xeon CPU E5606 @ 2.13 GHz com o sistema operativo Ubuntu 14.02.

6.2.1 Bloco esmagado

O presente problema visa o estudo da determinação da capacidade resistente de um bloco retangular comprimido sujeito a uma força distribuída de compressão. O bloco retangular tem largura L e altura $H = \frac{L}{2}$, estando comprimido entre duas placas horizontais por meio de uma força distribuída p . Este problema é analisado em condições de deformação plana sendo representado esquematicamente na figura 6.1(a).

Os materiais que definem este problema assumem um comportamento homogéneo e isotrópico. Assume-se que a resistência do bloco é caracterizada pelo critério de Tresca (ou de von Mises), com coesão c . As placas horizontais apresentam uma resistência caracterizada pelo critério rígido. O contacto entre estes elementos (bloco e placas) é considerado perfeitamente rugoso, o que resulta na igualdade do deslocamento do bloco e das placas nesta zona.

Explorando as condições de simetria deste problema, apenas o quarto superior direito do bloco foi modelado, adicionando para isso as propriedades dos eixos de simetria nas novas fronteiras, como ilustrado na figura 6.1(b). Assim nesta figura, para a análise segundo o teorema cinemático (TC) expõem-se as restrições ao vetor das velocidades através das condições de apoio. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as

restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais) de forma a simular as arestas livres, simétricas e carregadas.

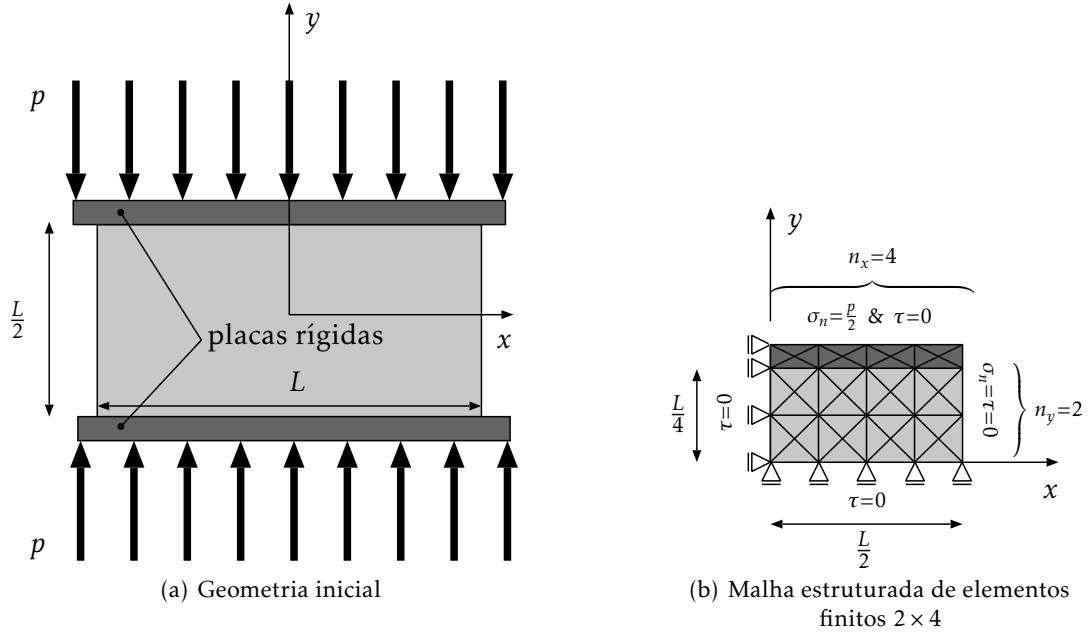


Figura 6.1: Problema do bloco esmagado em condições de deformação plana

As malhas utilizadas para analisar este problema foram definidas com base numa grelha ortogonal regular $n_y \times n_x$, sendo n_x e n_y o número de divisões do bloco segundo a direção x e y , respetivamente. De seguida, cada elemento quadrangular é dividido em quatro triângulos através das suas diagonais, como ilustrado na figura 4.2.

Na figura 6.1(b) mostra-se um exemplo deste tipo de malha de elementos finitos utilizada para o caso de 2×4 . No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC) considerou-se que seriam modelados por elementos quadráticos subparamétricos (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por triângulos lineares isoparamétricos (tabela 4.3).

O problema do bloco esmagado foi estudado por Pastor [113], onde se afirma que a solução exata deste problema foi obtida por Salençon [130]. Para o presente rácio, $\frac{L}{H} = 2$, o multiplicador de carga de colapso exata corresponde a $\alpha^* = 2.42768$, em que $\alpha = \frac{p}{cL}$.

Neste exemplo pretende-se, em primeiro lugar, mostrar a evolução da solução com o aumento do refinamento da malha de elementos finitos, sendo os resultados obtidos apresentados na tabela 6.1. Nesta tabela α^{TC} e α^{TE} correspondem, respetivamente, às estimativas obtidas segundo a aplicação dos teoremas cinemático e estático da análise limite.

Da análise da tabela 6.1 conclui-se, por um lado, que os resultados obtidos são muito satisfatórios mesmo para graus de refinamentos mais grosseiros. Nestes casos, as estimativas obtidas apresentam erros desprezáveis do ponto de vista da engenharia.

Tabela 6.1: Problema do bloco esmagado: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento (malhas estruturadas)

Malha $n_y \times n_x$	α^{TE}	$\frac{\alpha^{TE}}{\alpha^*}$	α^{TC}	$\frac{\alpha^{TC}}{\alpha^*}$
2×4	2.37064	0.97650	2.64210	1.08832
4×8	2.39532	0.98667	2.53533	1.04434
8×16	2.41022	0.99281	2.48236	1.02252
16×32	2.41855	0.99624	2.45557	1.01149
32×64	2.42300	0.99807	2.44189	1.00585
64×128	2.42530	0.99902	2.43490	1.00297
128×256	2.42647	0.99950	2.43133	1.00150

Por outro lado, para o mesmo nível de refinamento, a formulação baseada no teorema estático apresenta uma maior proximidade à carga de colapso exata do que a formulação baseada no teorema cinemático. De facto, esta diferença tende a diminuir com o aumento do refinamento, onde no caso da malha 128×256 , a estimativa TE apresenta um erro relativo 3 vezes inferior ao obtido pela estimativa TC. O erro referido anteriormente é utilizado ao longo deste exemplo, denominado por erro real, é obtido através da seguinte expressão:

$$ERRO_{Real} = \left| 1 - \frac{\alpha}{\alpha^*} \right| \times 100\% \quad (6.1)$$

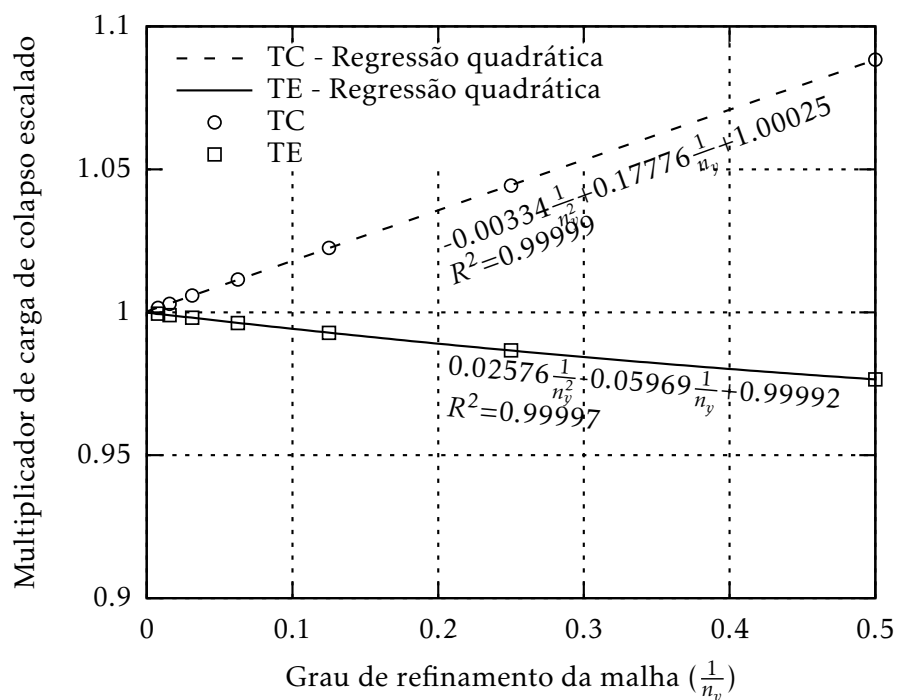


Figura 6.2: Problema do bloco esmagado: relação entre a carga de colapso e a carga de colapso limite em função do grau de refinamento

Na figura 6.2, representam-se os resultados em termos de $\frac{\alpha}{\alpha^*}$ em função do grau de refinamento da malha obtidos recorrendo ao teorema estático e ao teorema cinemático, ajustando a cada um destes conjuntos uma regressão quadrática. As regressões obtidas apresentam uma forte correlação com os dados, onde o coeficiente de determinação como se pode constatar, assume valores muito próximos de 1 ($R \simeq 1$). Desta forma, é possível considerar que o erro $O(\frac{1}{n_y^2})$ é uma função do grau de refinamento da malha. Este facto, permite extrapolar com grande precisão o valor do multiplicador de carga de colapso. Bastando para isso, obter o limite da expressão da regressão quadrática quando o grau de refinamento da malha tende para zero ($\frac{1}{n_y} \rightarrow 0$), resultando para o caso do teorema estático no valor de 2.42749 ($0.99992\alpha^*$) e para o caso do teorema cinemático no valor de 2.42829 ($1.00025\alpha^*$).

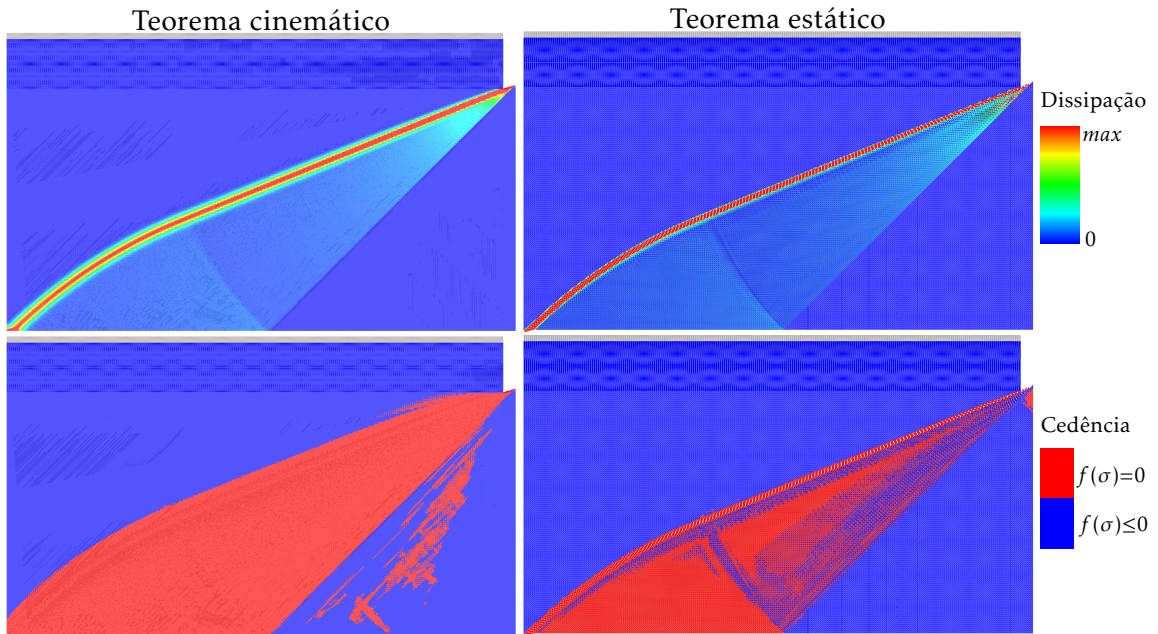


Figura 6.3: Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 128×256

Na figura 6.3, representa-se o comportamento na cedência observado das malhas obtidas para os cálculos realizados segundo os teoremas cinemático e estático da análise limite. Assim, optou-se por reproduzir para a malha mais refinada (128×256), o mecanismo de colapso e a distribuição da dissipação plástica nos elementos. Igualmente, nesta malha, escolheu-se retratar o mecanismo de colapso e a distribuição dos elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência. Nesta figura, representa-se a cinzento a configuração inicial da malha e a colorido a configuração deformada da malha.

Da análise da figura 6.3 podem tecer-se os seguintes comentários:

- O mecanismo de colapso é definido por quatro zonas. Na primeira zona, os elementos não apresentam dissipação mas apresentam deslocamento, assemelhando-se a um movimento de corpo rígido na vertical. A segunda zona, também chamada de

superfície de deslizamento, é caracterizada por uma dissipação plástica elevada. A terceira zona, apresenta dissipação plástica de diferentes intensidades sendo caracterizada por deformações menos significativas. Por fim, na quarta zona os elementos não apresentam dissipação mas apresentam deslocamento, assemelhando-se a um movimento de corpo rígido na horizontal;

- Existe uma grande semelhança entre a distribuição da dissipação plástica e a distribuição da função de cedência;
- O caso do teorema estático corresponde ao que apresenta superfícies de deslizamento mais estreitas;
- No caso TC é mais visível a existência de regiões onde o material atinge a resistência de cedência sem entrar em deformação plástica;
- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático. Em contraste, como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo, como ilustrado na figura 6.4. Apesar disso, em ambos os casos, o campo das velocidades apresenta a mesma ordem de grandeza.

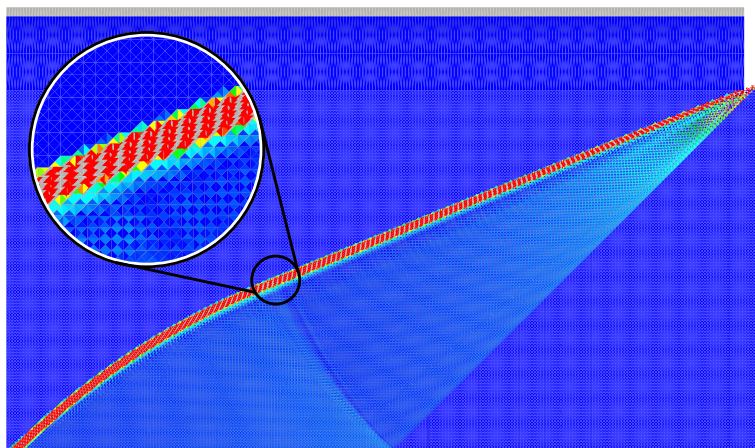


Figura 6.4: Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso e distribuição da função de cedência nos elementos para a malha 128×256 analisada segundo o teorema estático (vista aumentada localmente)

Para as malhas utilizadas no presente problema (tabela 6.1), exceto a mais grosseira, é representado na figura 6.5 a evolução da estimativa do multiplicador de carga de colapso escalado $\left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)$, com o decorrer do processo iterativo do algoritmo MDAM. Constata-se que uma estimativa aceitável da solução final (tabela 6.1) é obtida para um número reduzido de iterações. De facto, em menos de 400 iterações o algoritmo MDAM obtém uma solução com um erro máximo de 0.5% da estimativa final, que corresponde a um erro desprezável em termos da engenharia. Por outro lado, para obter estimativas de elevada precisão com um erro à volta de 0.0002% (5 casas decimais) o número de iterações necessárias aumenta consideravelmente.

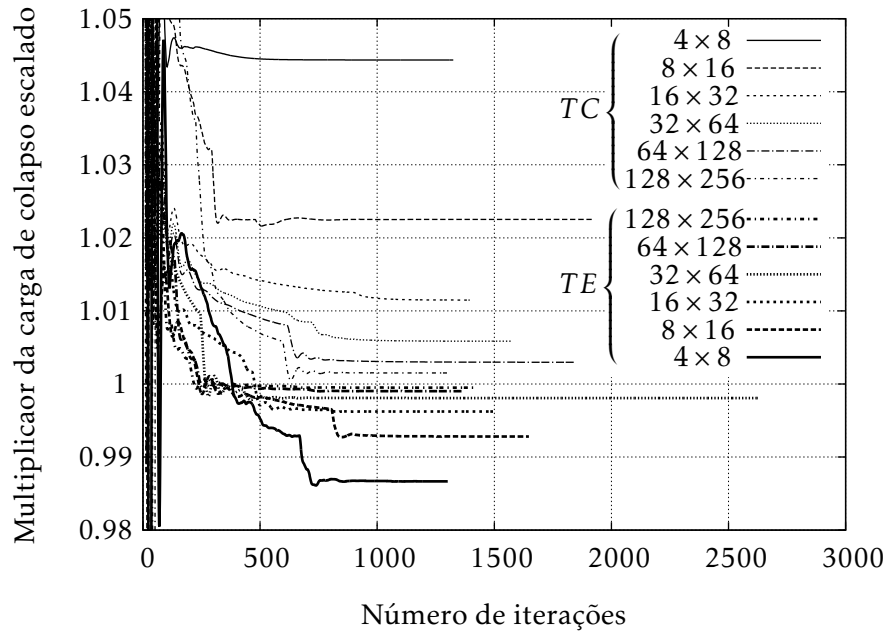


Figura 6.5: Problema do bloco esmagado: ilustração da taxa de convergência do algoritmo MDAM

Por fim geraram-se três malhas não estruturadas usando o programa *Gmsh* [47]. A mais grosseira dessas malhas está representada na figura 6.6. Estas malhas foram criadas de forma a que o seu número de elementos, n_E , corresponda aproximadamente ao número de elementos da malha estruturada mais grosseira (2×4), da média (16×32) e da mais refinada (128×256).

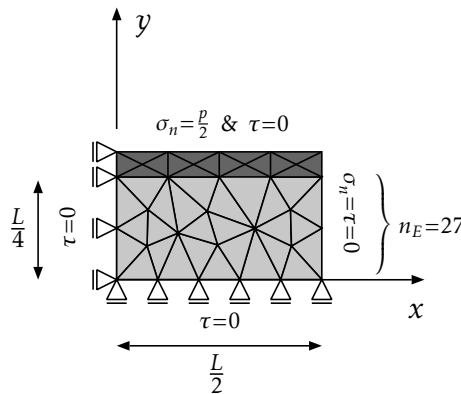


Figura 6.6: Problema do bloco esmagado: malha não estruturada de elementos finitos $n_E = 27$

Estas malhas foram modeladas pelos mesmos elementos finitos definidos para as malhas estruturadas. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 6.2 para cada um dos comprimentos caraterísticos escolhidos. Define-se o comprimento caraterístico, l_{cr} , como a dimensão que se obtém do rácio entre a área e o perímetro dos elementos na malha de elementos finitos.

Comparando a tabela 6.1 com a tabela 6.2, conclui-se que os resultados obtidos neste

Tabela 6.2: Problema do bloco esmagado: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento (malhas não estruturadas)

Malha		α^{TE}	$\frac{\alpha^{\text{TE}}}{\alpha^*}$	α^{TC}	$\frac{\alpha^{\text{TC}}}{\alpha^*}$
l_{cr}	n_E				
0.498	27	2.32255	0.95670	2.72027	1.12052
0.045	2021	2.41480	0.99469	2.45761	1.01233
0.00555	131043	2.42500	0.99890	2.43257	1.00201

caso não estruturado são ligeiramente superiores para o teorema cinemático e ligeiramente inferiores para o teorema estático em relação às malhas estruturadas com sensivelmente o mesmo número de elementos. De facto, a diferença tende a diminuir com o aumento do refinamento da malha e é no máximo de 2.0% no caso do teorema estático e 3.3% no caso do teorema cinemático, demonstrando, uma ausência de fenómenos de *locking*. Além disso, conclui-se que os bons resultados obtidos na estimativa do multiplicador de carga de colapso pelo modelo proposto são independentes da orientação dos elementos na malha.

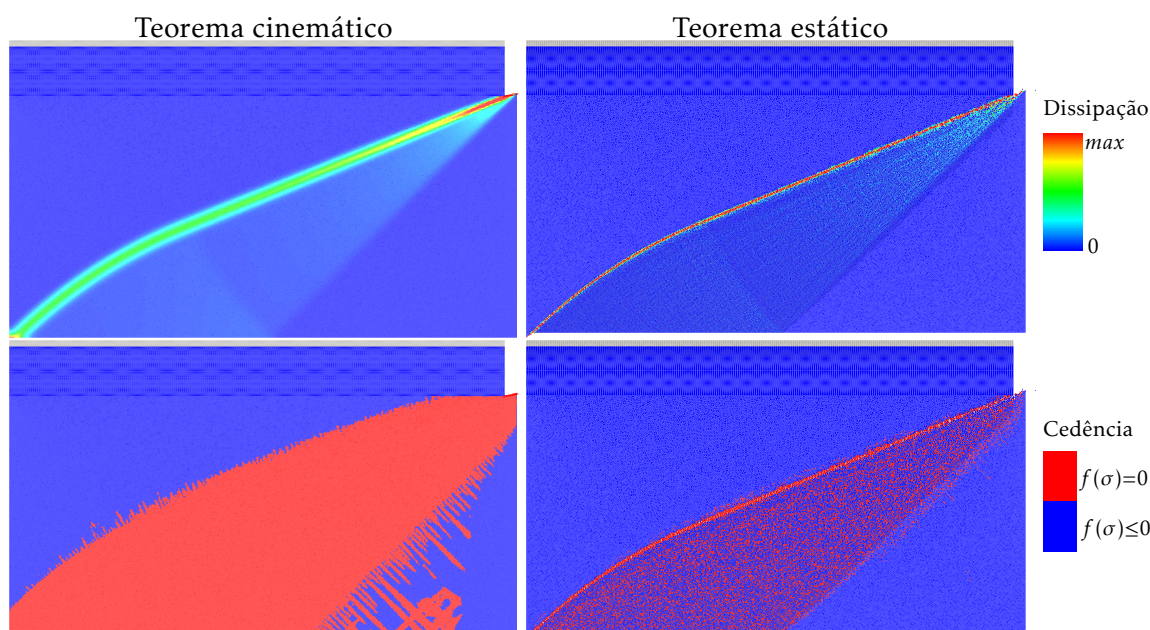


Figura 6.7: Problema do bloco esmagado: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha $n_E = 131043$ (malha não estruturada)

Na figura 6.7, representa-se o comportamento na cedência observado das malhas não estruturadas obtidas para os cálculos realizados segundo os teoremas cinemático e estático da análise limite. Assim, optou-se por reproduzir para a malha mais refinada ($n_E = 131043$), o mecanismo de colapso e a distribuição da dissipação plástica nos elementos. Igualmente, nesta malha, escolheu-se retratar o mecanismo de colapso e a distribuição

dos elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência. Nesta figura, tal como na figura 6.3, representa-se a cinzento a configuração inicial da malha e a colorido a configuração deformada da malha.

Da análise da figura 6.7 podem tecer-se os mesmo comentários que os apresentados para a malha estruturada. Verifica-se ainda que os campos representados nas malhas não estruturadas (figura 6.7) apresentam a mesma ordem de grandeza que os campos apresentados nas malhas estruturadas (figura 6.3).

6.2.2 Cilindro oco sob pressão interna

O presente problema visa o estudo da determinação da capacidade resistente de um cilindro oco espesso sujeita a uma pressão interna. O cilindro oco espesso apresenta uma secção circular definida pelo seu raio interior, r_i , e pelo raio exterior, r_e . A superfície interior do cilindro está sujeita a uma força de pressão p . Este problema é analisado em condições de deformação plana sendo representado esquematicamente na figura 6.8(a).

O material que define este cilindro oco assume um comportamento homogéneo e isotrópico. Os elementos que definem esta secção apresentam por um lado uma resistência puramente coesiva definida pelo critério de Tresca (ou de von Mises), com coesão c , e por outro lado, uma resistência coesiva-friccional definida pelo critério de Mohr-Coulomb (ou de Drucker-Prager), com coesão c e ângulo de atrito interno, ϕ .

Exploram-se igualmente as condições de simetria do problema de forma a que o número de elementos finitos necessário seja menor. Apenas foi discretizado o quarto superior direito da secção circular, adicionando para isso as propriedades de simetria nas novas fronteiras, como ilustrado na figura 6.8(b). Assim nesta figura, para a análise segundo o teorema cinemático (TC) expõem-se as restrições ao vetor das velocidades através das condições de apoio. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais) de forma a simular as arestas livres, simétricas e carregadas.

As malhas estruturadas utilizadas para analisar este problema foram definidas com base numa grelha cilíndrica uniforme $n_r \times n_\varphi$, sendo n_r e n_φ o número de divisões do bloco segundo a direção do raio e segundo a amplitude do ângulo $\varphi = 90^\circ$, respetivamente. Na realidade, bastaria resolver o problema considerando $n_\varphi = 1$, contudo a rotação das condições de fronteira ainda não se encontra implementada.

Estas malhas estruturadas foram definidas de forma a que os elementos quadrangulares mais interiores representem aproximadamente um quadrado. De seguida cada elemento quadrangular é dividido em quatro triângulos através das suas diagonais, como ilustrado na figura 4.2. Na figura 6.8(b) mostra-se o exemplo mais grosseiro (5×15) do tipo de malha de elementos finitos utilizada para analisar este problema. No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC) considerou-se que seriam modelados por elementos quadráticos subparamétricos (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por triângulos lineares isoparamétricos (tabela 4.3).

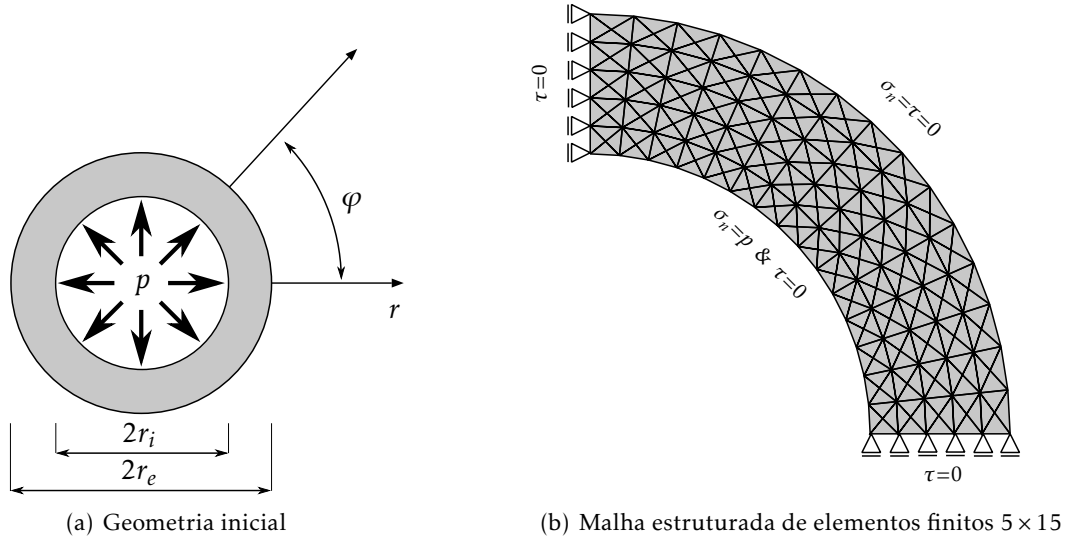


Figura 6.8: Problema do cilindro oco sobre pressão interna em condições de deformação plana

O cilindro oco sob pressão interna corresponde a um exemplo muito utilizado na literatura da análise limite [78, 87, 29], onde se afirma que a solução para este problema foi desenvolvida por diferentes autores [57, 107, 162]. Independentemente de quem foi o primeiro que obteve a expressão analítica, o multiplicador de carga de colapso exato, α^* , em que $\alpha = \frac{p}{c}$, é obtido pela seguinte expressão:

$$\alpha^* = \tan^{-1}(\phi) \left(\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\left(\frac{\zeta-1}{\zeta} \right)} - 1 \right) \quad (6.2)$$

onde ζ é uma constante do material atrítico, sendo definida pela seguinte expressão,

$$\zeta = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (6.3)$$

com ϕ definido em graus.

Como se constata pela observação da equação (6.2), quando $\phi = 0^\circ$ a solução torna-se indeterminada. Assim, para o caso não drenado, esta equação converte-se no seu limite quando $\phi \rightarrow 0^\circ$, resultando em,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \alpha^* = 2 \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad (6.4)$$

Optou-se por analisar o rácio de $\frac{r_e}{r_i} = 1.5$ para diferentes ângulos de atrito ϕ expondo-se na tabela 6.3 os valor exatos dos multiplicadores da carga de colapso.

Neste exemplo pretende-se, em primeiro lugar, mostrar a evolução da solução com o aumento de refinamento, sendo os resultados obtidos apresentados na tabela 6.4, onde

Tabela 6.3: Cilindro sob pressão interna: multiplicadores da carga de colapso exatos

	$\phi(^{\circ})$									
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
α^*	0.81093	0.76776	0.72295	0.67713	0.63075	0.58416	0.53758	0.49116	0.44502	0.39920

α^{TC} e α^{TE} , correspondem às estimativas obtidas com a aplicação dos teoremas cinemático e estático da análise limite, respetivamente. Por fim, reforça-se que os cálculos realizados com $\phi = 0^{\circ}$ foram realizados utilizando o critério de Tresca (ou de von Mises).

Tabela 6.4: Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento

$\phi(^{\circ})$	α	Malha ($n_r \times n_{\phi}$)				
		5×15	10×30	20×60	40×120	80×240
0	α^{TC}	0.81135	0.81103	0.81095	0.81094	0.81093
	α^{TE}	0.80060	0.80804	0.81016	0.81073	0.81088
5	α^{TC}	0.76821	0.76788	0.76779	0.76777	0.76777
	α^{TE}	0.75742	0.76490	0.76701	0.76757	0.76772
10	α^{TC}	0.72335	0.72305	0.72298	0.72296	0.72296
	α^{TE}	0.71288	0.72020	0.72223	0.72277	0.72291
15	α^{TC}	0.67748	0.67722	0.67715	0.67714	0.67713
	α^{TE}	0.66752	0.67452	0.67645	0.67695	0.67709
20	α^{TC}	0.63107	0.63083	0.63077	0.63076	0.63076
	α^{TE}	0.62169	0.62830	0.63012	0.63059	0.63071
25	α^{TC}	0.58444	0.58423	0.58418	0.58416	0.58416
	α^{TE}	0.57570	0.58188	0.58357	0.58401	0.58412
30	α^{TC}	0.53783	0.53764	0.53759	0.53758	0.53758
	α^{TE}	0.52974	0.53547	0.53703	0.53744	0.53754
35	α^{TC}	0.49138	0.49122	0.49118	0.49117	0.49116
	α^{TE}	0.48386	0.48920	0.49065	0.49103	0.49113
40	α^{TC}	0.44521	0.44507	0.44503	0.44502	0.44502
	α^{TE}	0.43827	0.44319	0.44454	0.44490	0.44499
45	α^{TC}	0.39936	0.39924	0.39921	0.39920	0.39920
	α^{TE}	0.39304	0.39753	0.39876	0.39909	0.39917

Da análise da tabela 6.4, conclui-se que os resultados obtidos são muito satisfatórios mesmo para graus de refinamento mais grosseiros. O multiplicador de carga de colapso escalado para o caso do teorema cinemático ($\alpha^{\text{TC}}/\alpha^*$) apresenta no máximo o valor de 1.00059 ($\phi = 5^{\circ}$, malha 5×15), por outro lado, para o caso do teorema estático o multiplicador de carga de colapso escalado ($\alpha^{\text{TE}}/\alpha^*$) apresenta no mínimo o valor de 0.98457 ($\phi = 45^{\circ}$, malha 5×15). Os erros destas grandezas podem ser considerados desprezáveis do ponto de vista da engenharia.

Neste exemplo, para o mesmo nível de refinamento, a formulação baseada no teorema

cinemático apresenta uma maior proximidade à carga de colapso exata do que a formulação baseada no teorema estático. De facto, esta diferença tende a diminuir com o aumento do refinamento da malha de elementos finitos.

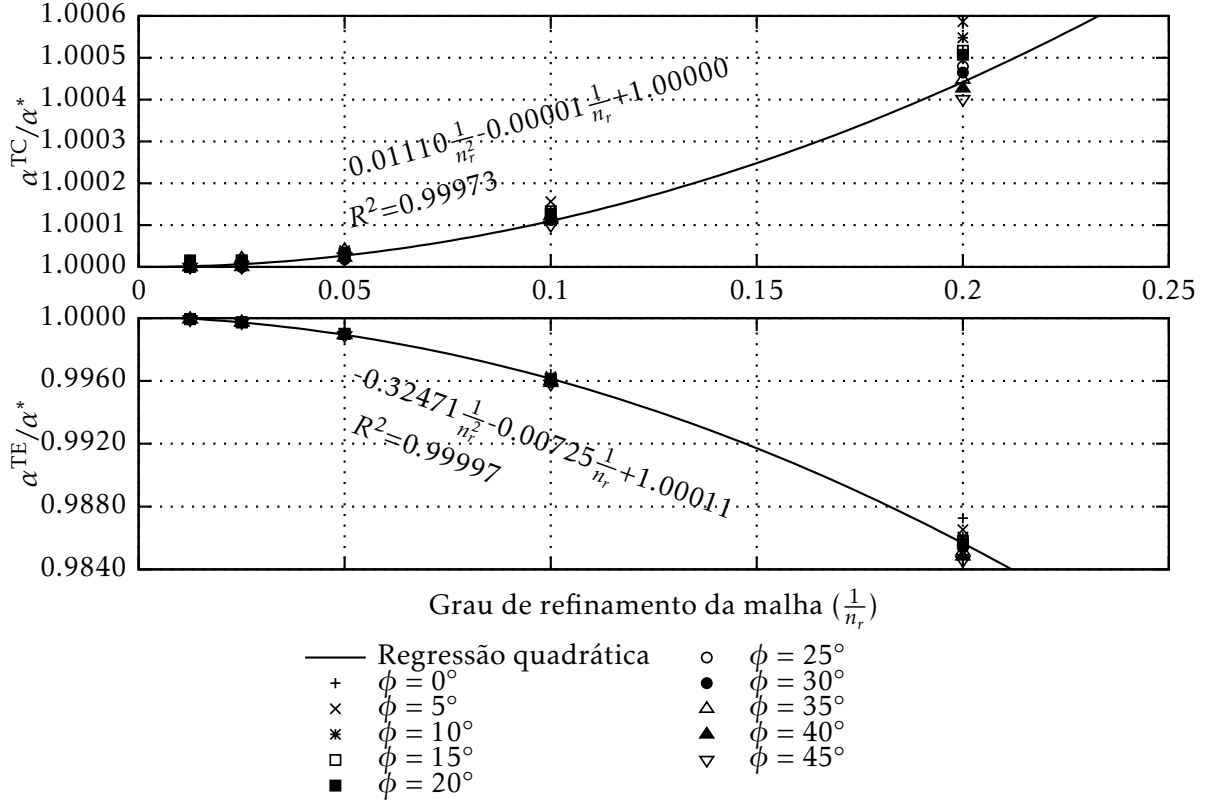


Figura 6.9: Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento

Na figura 6.9, representam-se os resultados em termos de $\frac{\alpha}{\alpha^*}$ em função do grau de refinamento da malha obtidos recorrendo ao teorema estático como ao teorema cinemático, ajustando a cada um destes conjuntos uma regressão quadrática média. Nesta figura a escala vertical utilizada para representar os resultados obtidos pelo teorema cinemático é inferior à escala utilizada para representar os resultados obtidos pelo teorema estático, de forma a permitir uma melhor compreensão dos resultados. As regressões quadráticas médias obtidas apresentam uma forte correlação com os dados, onde o coeficiente de determinação como se pode constatar, assume valores muito próximos de 1 ($R \simeq 1$). Desta forma, é possível considerar que o erro $O(\frac{1}{n_r^2})$ é uma função do grau de refinamento da malha. Este facto, permite extrapolar com grande precisão o valor do multiplicador de carga de colapso para cada caso de ϕ . Bastando para isso, obter o limite da expressão da regressão quadrática específica quando o grau de refinamento da malha tende para zero ($\frac{1}{n_r} \rightarrow 0$). O valor limite da regressão quadrática média para o teorema estático é ligeiramente superior ao obtido pelo teorema cinemático, que corresponde a erros de arredondamentos.

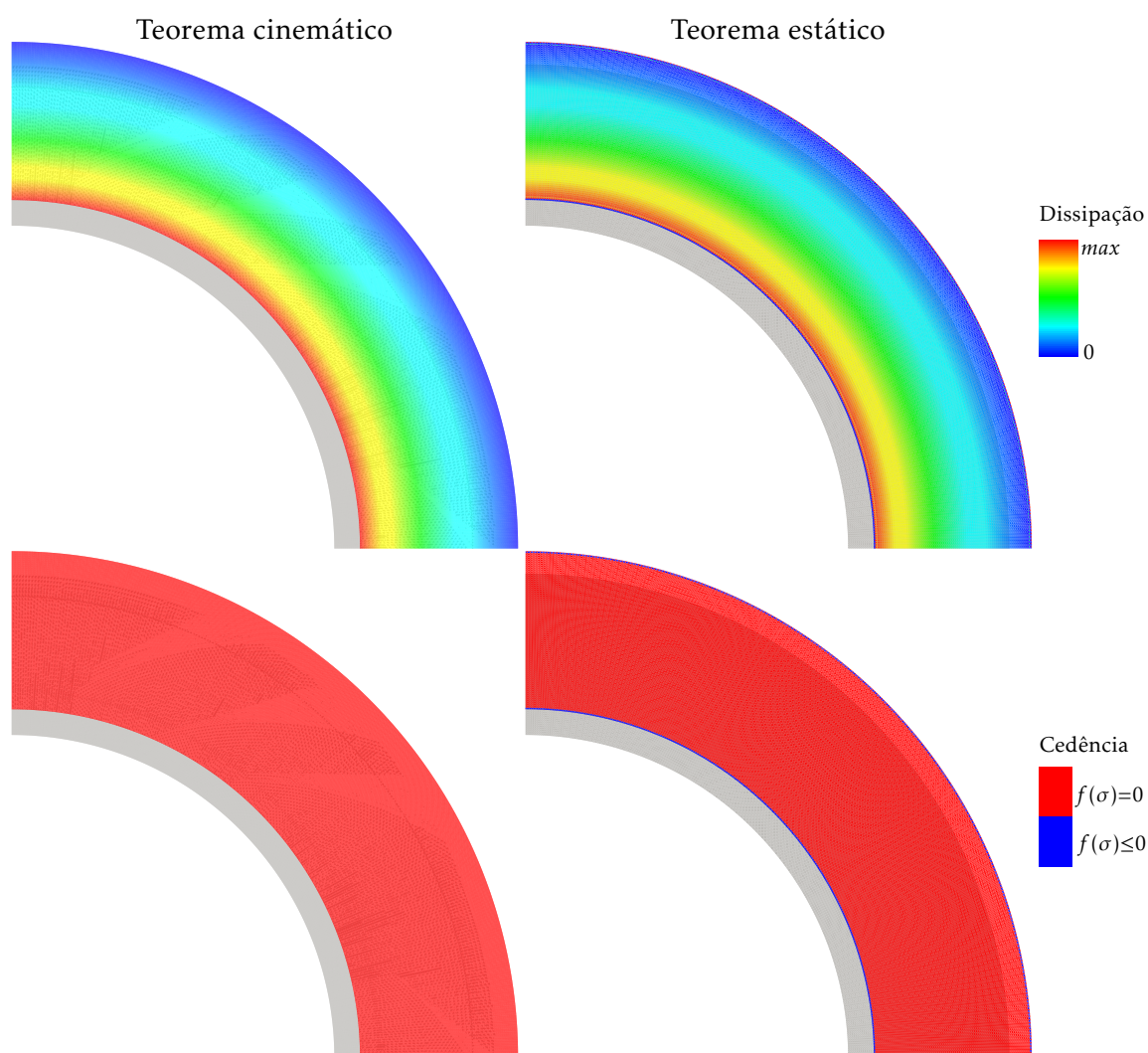


Figura 6.10: Cilindro oco sob pressão interna: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 80×240

Na figura 6.10, representa-se o comportamento na cedência observado das malhas obtidas para os cálculos realizados segundo o teorema cinemático e estático da análise limite. Assim optou-se por reproduzir para a malha mais refinada (80×240) com $\phi = 30^\circ$ o mecanismo de colapso e a distribuição da dissipação plástica nos elementos. Igualmente, nesta malha, escolheu-se retratar o mecanismo de colapso e a distribuição dos elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência. Nesta figura, representa-se a cinzento a configuração inicial da malha e a colorido a configuração deformada da malha.

Da análise da figura 6.10 podem tecer-se os seguintes comentários:

- O mecanismo de colapso é definido por um deslocamento radial de expansão de todos os elementos, diminuindo a sua intensidade com o aumento da distância ao centro do cilindro oco;

- Existe uma grande semelhança entre as distribuições (dissipação plástica e da função de cedência) obtidas pelo teorema cinemático e pelo teorema estático;
- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático, em contraste e como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo. Apesar disso, em ambos os casos, o campo das velocidades apresenta a mesma ordem de grandeza.

Por fim, para o caso do material ser definido por uma resistência coesiva-friccional com $\phi = 30^\circ$, analisou-se a influência do tipo de aproximação das velocidades (linear ou quadrática), tabela 4.1, no caso do teorema Cinemático (TC) sobre os resultados. Os resultados obtidos desta análise são apresentados na tabela 6.5.

Tabela 6.5: Cilindro oco sob pressão interna: evolução da carga de colapso TC como uma função do refinamento (malha com elementos lineares e quadráticos) para $\phi = 30^\circ$

Malha	$\frac{\alpha}{\alpha^*}$	Malha ($n_r \times n_\phi$)				
		5×15	10×30	20×60	40×120	80×240
Linear	$\frac{\alpha^{TC}}{\alpha^*}$	1.00093	1.00022	1.00006	1.00002	1.00000
	NDOF ^{TC}	331	1261	4921	19441	77281
Quadrática	$\frac{\alpha^{TC}}{\alpha^*}$	1.00047	1.00011	1.00002	1.00000	1.00000
	NDOF ^{TC}	1261	4921	19441	77281	308161

Analisando a tabela 6.5, percebe-se que os resultados obtidos com as malhas de aproximação linear são ligeiramente superiores às das aproximações quadráticas, apresentando no máximo uma diferença de 0.05% que tende a diminuir para zero com o aumento do refinamento, demonstrando uma ausência de fenómenos de *locking*. Esta percentagem de erro foi calculada com auxílio da equação (6.1). A diferença deve-se sobretudo ao facto dos elementos quadráticos apresentarem um maior número de graus de liberdade (NDOF), o que faz que para o mesmo caso analisado apresentem uma maior proximidade à solução exata. Conclui-se assim, que ambos os elementos lineares e quadráticos apresentam um desempenho bastante análogo, verificando-se todavia, uma ligeira vantagem na utilização dos elementos lineares respeitante ao número de graus de liberdade, conforme ilustrado na figura 6.11.

Nesta figura a escala horizontal é representada em escala logarítmica, de forma a permitir uma melhor leitura dos resultados. Como nota final, menciona-se que em ambos os casos (elementos subparamétricos e isoparamétricos) a taxa de convergência da solução em relação ao número de graus de liberdade do problema é mais acentuada para malhas menos refinadas (NDOF mais reduzidos), observando-se um decrescimento gradual desta taxa à medida que aumenta a precisão da solução (NDOF mais elevados).

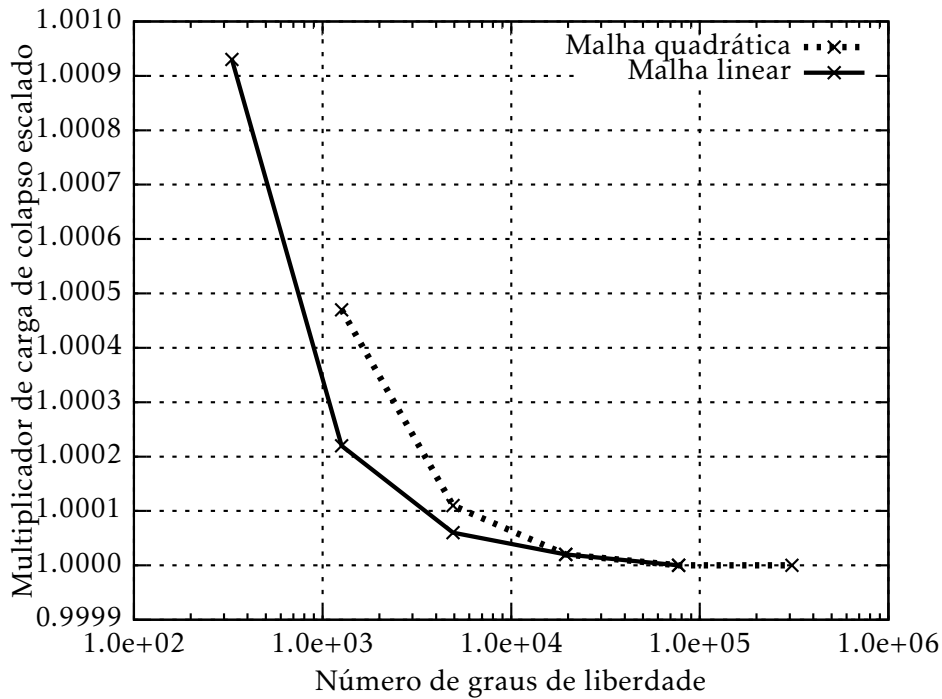


Figura 6.11: Cilindro oco sob pressão interna: comparação da evolução da carga de colapso como uma função dos graus de liberdade

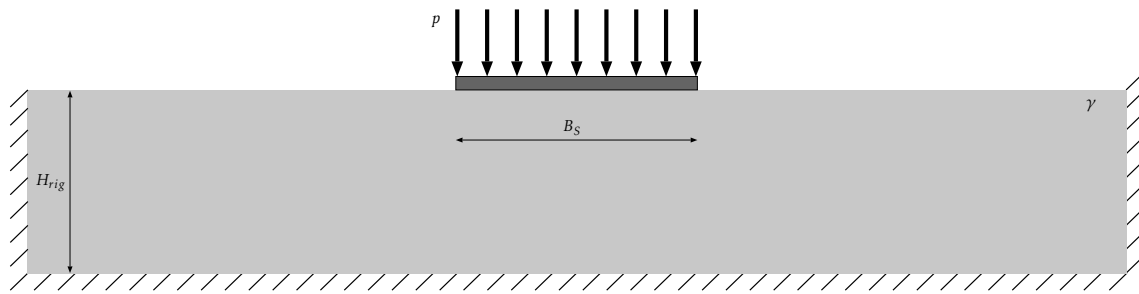
6.2.3 Fundações superficiais corridas

O problema da capacidade de carga de fundações superficiais corridas em deformação plana é um problema clássico da mecânica dos solos. Neste trabalho é abordado de forma a permitir mostrar o funcionamento dos elementos de extensão no caso bidimensional.

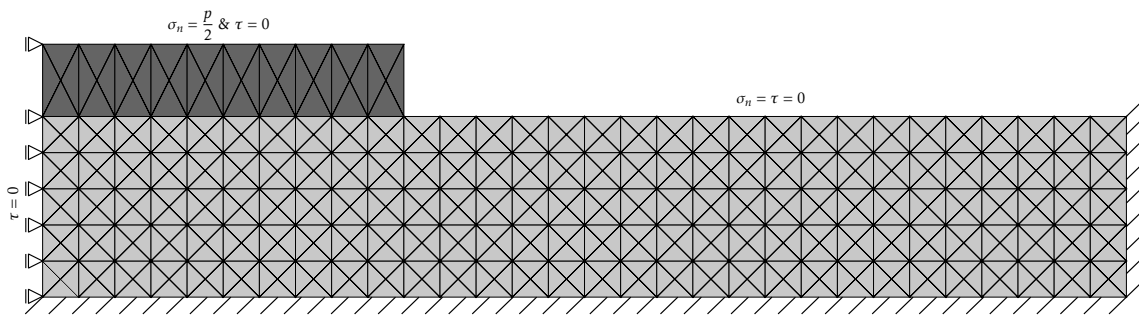
Na figura 6.12(a) apresenta-se o modelo geométrico do problema aqui abordado: trata-se de uma sapata rígida de lado B_S apoiada na superfície do solo com o estrato rígido situado à profundidade H_{rig} . O material que define este terreno assume um comportamento homogêneo e isotrópico. Considera-se que o contacto entre a sapata e o solo é perfeitamente rugoso. O único carregamento variável deste problema corresponde à carga distribuída centrada vertical, p , aplicada na sapata. O peso próprio do solo, γ , pertence ao conjunto de carregamentos constantes.

Explora-se igualmente as condições de simetria do problema de forma a que o número de elementos finitos necessário seja menor. Apenas foi discretizado a metade direita do modelo, adicionando para isso as propriedades de simetria nas novas fronteiras, como ilustrado na figura 6.12(b). Assim nesta figura, para a análise segundo o teorema cinemático (TC) expõem-se as restrições ao vetor das velocidades através das condições de apoio. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais) de forma a simular as arestas livres, simétricas, carregadas e de extensão.

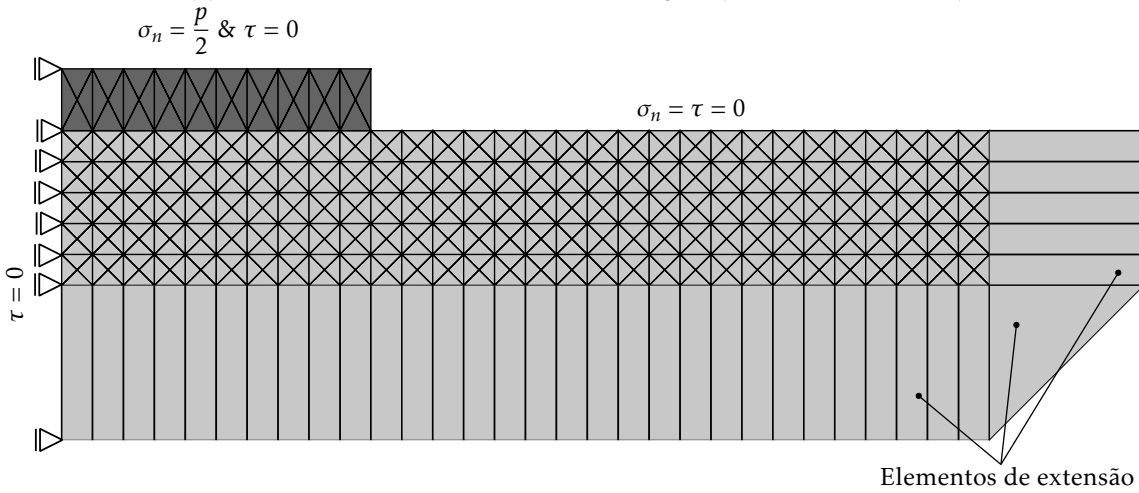
As malhas utilizadas para analisar este problema foram definidas com base numa grelha ortogonal regular de dimensões $B_S/50$, onde cada elemento quadrangular é dividido



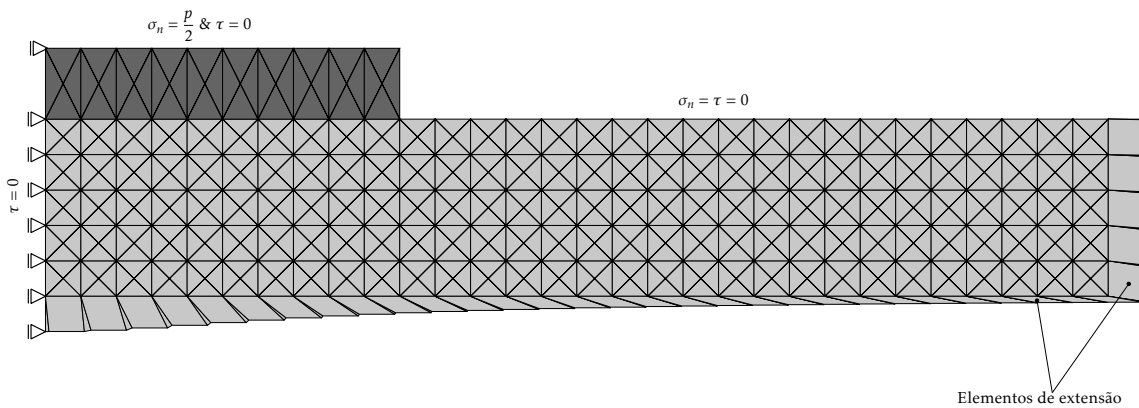
(a) Geometria inicial



(b) Malha estruturada de elementos finitos $B_s/10$ (TC e TE sem extensão)



(c) Malha estruturada de elementos finitos $B_s/10$ (TE com extensão 1º método)



(d) Malha estruturada de elementos finitos $B_s/10$ (TE com extensão 2º método)

Figura 6.12: Problema de fundações superficiais corridas

em quatro triângulos através das suas diagonais, como ilustrado na figura 4.2. Na figura 6.12(b), mostra-se um exemplo deste tipo de malha de elementos finitos utilizada para o caso de $B_S/20$, de forma a permitir uma melhor compreensão/visualização.

No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático considerou-se que seriam modelados por triângulos de seis nós (tabela 4.1) para a aproximação das velocidades, e no caso do teorema estático por triângulos de três nós (tabela 4.3) para a aproximação do campo de tensão.

Este problema foi tratado por [90, 95] e serve neste trabalho para pôr em evidência tanto a capacidade dos elementos de extensão como o seu bom funcionamento em condições não drenadas e em condições drenadas.

Em condições não drenadas, supõe-se um solo sem peso próprio, definido pelo critério de Tresca (com resistência não drenada c_u). A capacidade de carga de uma fundação superficial exata, p_u , para a situação descrita na figura 6.12 quando H_{rig} é infinito é conhecida, sendo obtida através da seguinte expressão,

$$p_u = c_u N_c \quad (6.5)$$

onde N_c , corresponde ao coeficiente de capacidade de carga associado ao termo coesivo. A solução exata deste coeficiente foi inicialmente obtida por Prandtl [118] e corresponde ao valor:

$$N_c = 2 + \pi \quad (6.6)$$

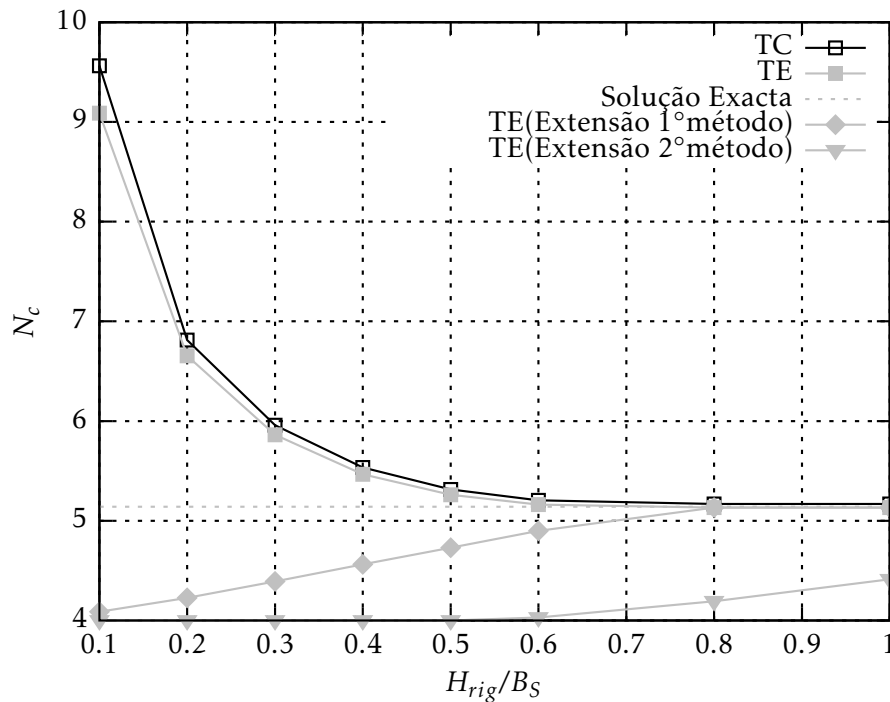


Figura 6.13: Problema de fundações superficiais corridas (caso não drenado): evolução da capacidade resistente da sapata como uma função da distância à superfície do estrato rígido

Na figura 6.13, apresenta-se a evolução das aproximações cinemáticas e estática da capacidade resistente da sapata com a evolução da distância (escalada) da superfície ao estrato rígido, H_{rig}/B_S .

Quando H_{rig}/B_S é pequeno o problema em questão apresenta um maior número de restrições influenciando as soluções obtidas. Estas restrições traduzem-se num aumento da capacidade de carga que terá de ser aproximada tanto pelos resultados do teorema cinemático como pelos do teorema estático.

Com o aumento de H_{rig}/B_S , a influência das restrições da fronteira vai diminuindo até que deixará de contar para a solução. Assim, a solução tenderá, com o aumento do H_{rig}/B_S para o valor exato correspondente ao meio semi-infinito. Este comportamento é facilmente observado na figura 6.13 em que vemos a diminuição das aproximações do teorema estático e cinemático da análise que tendem para o valor da solução exata com o aumentar do H_{rig}/B_S .

Com a introdução de elementos de extensão na fronteira do modelo, o problema resolvido pelo teorema estático é transformado, em todas as malhas, no problema da capacidade de carga da fundação em meio semi-infinito. Por conseguinte o teorema estático deverá fornecer soluções inferiores à solução exata deste problema. Para os valores reduzidos de H_{rig}/B_S o problema é mal representado pela malhas utilizadas e a solução é correspondentemente de menor qualidade. Com o aumento de H_{rig}/B_S o domínio onde a solução se pode desenvolver antes de alcançar os elementos de fronteira vai aumentando e assim diminuindo as restrições sobretudo no que à distribuição de tensões diz respeito, fazendo com que a solução obtida com elementos de extensão tenda para a solução exata do meio semi-infinito, como se pode constar na figura 6.13.

Por outro lado, comparando os dois tipos de extensão verifica-se que o 2º método permite uma maior variedade de trajetórias de tensão, ver figura 6.12(d), conseguida através de um maior número de elementos do tipo bidirecional, em comparação com o 1º método, ver figura 6.12(c), fazendo com que a capacidade de carga obtida pelo 2º método seja inferior à do 1º método. A justificação para esta redução no valor da carga de colapso, deve-se ao facto da existência de um maior número de trajetórias originar que seja necessária a verificação de um maior número de restrições nestas zonas.

No segundo caso, estuda-se a rotura em condições drenadas, num solo puramente atrítico definido pelo critério de Mohr-Coulomb com um ângulo de resistência ao corte, $\phi' = 30^\circ$ e coesão efetiva nula $c' = 0$. Ao contrário do caso não drenado, a solução depende agora do peso volúmico do solo, que é considerado diferente de zero.

A solução para a situação descrita na figura 6.12 quando H_{rig} é infinito é conhecida, sendo obtida através da seguinte expressão:

$$p_u = \frac{1}{2} \gamma B_S N_\gamma \quad (6.7)$$

onde N_γ , corresponde ao coeficiente de capacidade de carga associado ao comportamento atrítico do solo devido à ação do seu peso próprio. A solução exata deste coeficiente

ainda não foi encontrada, contudo em [91, 132] são apresentadas boas estimativas deste coeficiente.

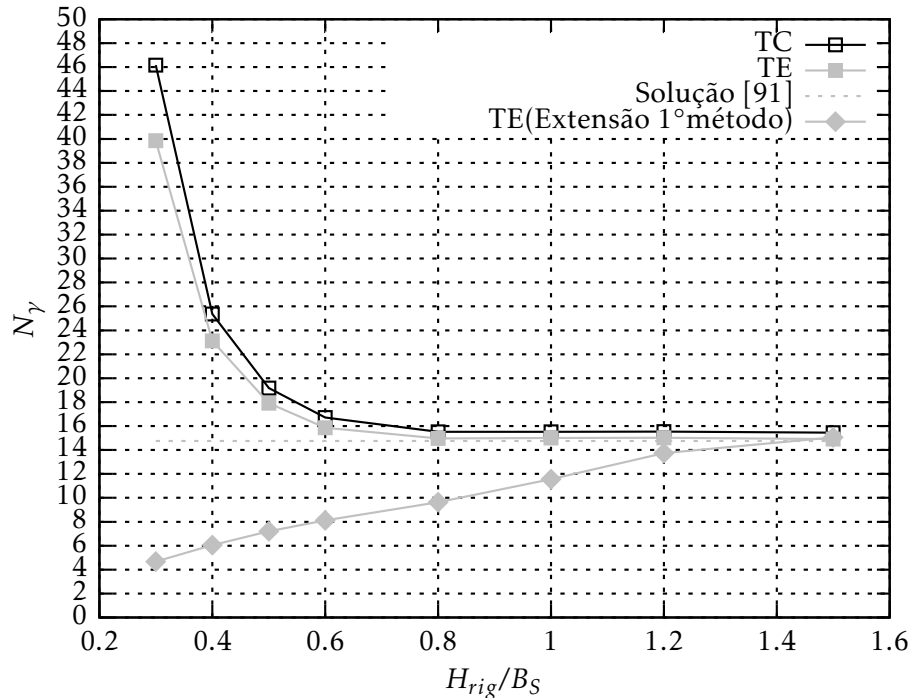


Figura 6.14: Problema de fundações superficiais corridas (caso drenado): evolução da capacidade resistente da sapata como uma função da distância à superfície do estrato rígido

Na figura 6.14 apresentam-se os resultados deste caso drenado tal como na figura 6.13 se apresentaram para o caso não drenado. Na ausência de solução exata considerou-se o N_γ obtido por [91] atendendo a que se considera uma solução muito próxima da exata. Nesta figura não se utilizou valores de H_{rig}/B_S inferiores a 0.3 devido ao valor elevado que produzem.

O comportamento é em tudo similar ao obtido no caso não drenado, confirmando igualmente o bom funcionamento dos elementos de extensão, neste caso correspondente ao critério de Mohr-coulomb.

6.2.4 Impulsos de terra

O presente problema visa o estudo da determinação de impulsos de terra de um maciço terroso. O maciço terroso é definido por uma superfície horizontal (inclinação, i_H , igual a zero) de largura L , e paramento vertical (inclinação, β_V , igual a 90°) de altura, $H + H_1$. O solo está sujeito ao peso próprio, γ , e a distribuições triangulares de tensões normais $\sigma_n(z)$ e tangenciais $\tau(z)$ aplicadas na altura H do paramento vertical. Este problema é analisado em condições de deformação plana sendo representado esquematicamente na figura 6.15(a). As dimensões L e H_1 foram escolhidas de forma a minimizarem a influência

das condições de fronteira na determinação da carga de colapso para o teorema cinemático (TC) e para o teorema estático (TE), independentemente.

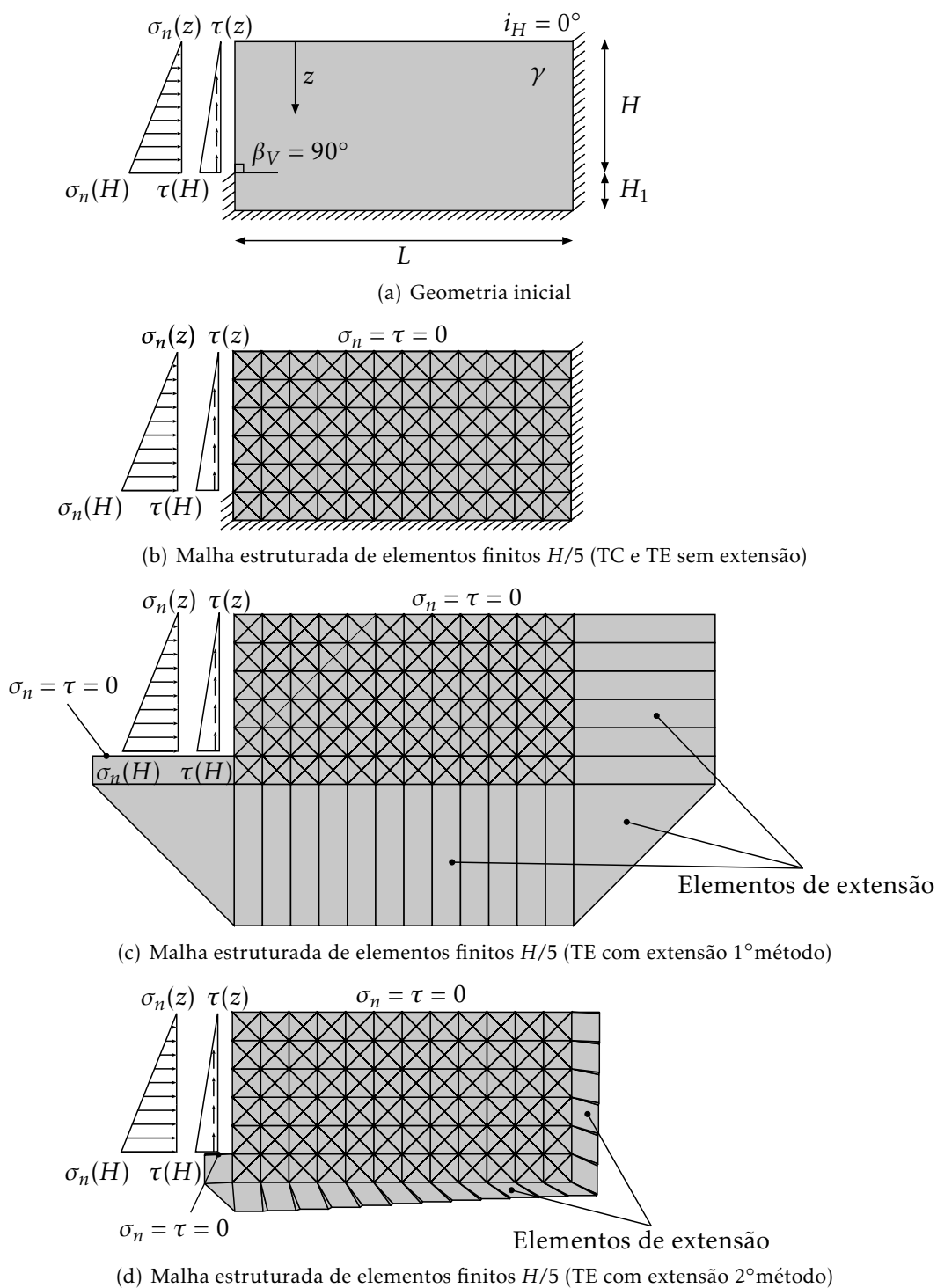


Figura 6.15: Problema de determinação de impulsos de terra em condições de deformação plana

O material que define este terreno assume um comportamento homogêneo e isotrópico. Os elementos que definem este solo apresentam uma resistência puramente atrítica definida pelo critério de Mohr-Coulomb (ou de Drucker-Prager), com coesão efetiva nula, $c' = 0$, e ângulo de resistência ao corte ϕ' .

As malhas utilizadas para analisar este problema foram definidas com base numa grelha ortogonal regular de dimensões $H/40$, onde cada elemento quadrangular é dividido em quatro triângulos através das suas diagonais, como ilustrado na figura 4.2. Na figura 6.15(b), mostra-se um exemplo deste tipo de malha de elementos finitos utilizada para o caso de $H/5$, de forma a permitir uma melhor compreensão/visualização. Assim, nesta figura, para a análise segundo o teorema cinemático (TC), expõem-se as restrições ao vetor das velocidades através das condições de apoio. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as restrições ao tensor das tensões de forma a simular as arestas livres e carregadas.

No caso dos cálculos realizados pelo teorema cinemático considerou-se que o solo seria modelado por triângulos de seis nós (tabela 4.1) para a aproximação das velocidades, e no caso do teorema estático, por triângulos de três nós (tabela 4.3) para a aproximação do campo de tensões.

O objetivo deste problema é validar os resultados para casos de problemas semi-infinitos, por isso, no caso do teorema estático, realizaram-se os cálculos numa primeira fase sem extensão, sendo posteriormente validados através dos cálculos obtidos pelos dois métodos de extensão implementados, representados esquematicamente pelas figuras 6.15(c) e 6.15(d). Nestas figuras, expõem-se igualmente as restrições ao tensor das tensões.

Tabela 6.6: Resultados obtidos de coeficientes de impulsos ativos e passivos para $\phi' = 30^\circ$

δ	K_a				K_p			
	Absi-Kérisel [2]	TE	TC	Müller-Breslau [97]	Absi-Kérisel [2]	TE	TC	Müller-Breslau [97]
-30	0.981	0.883	0.853	0.866	6.5	6.545	6.551	10.095
-20	0.476	0.476	0.476	0.469	5.3	5.255	5.256	6.105
-15	-	0.419	0.419	0.416	4.6	4.614	4.614	4.977
-10	-	0.381	0.381	0.379	4.0	4.020	4.020	4.143
0	0.333	0.333	0.333	0.333	3.0	3.000	3.000	3.000
10	-	0.309	0.309	0.308	2.15	2.193	2.193	2.238
15	-	0.303	0.303	0.301	1.8	1.853	1.853	1.932
20	0.300	0.300	0.300	0.297	1.46	1.543	1.543	1.647
30	0.308	0.308	0.307	0.297	-	0.841	0.858	0.866

Neste exemplo, pretende-se obter os resultados dos coeficientes de impulso ativos, K_a , e dos coeficientes de impulso passivos, K_p , para $\phi' = 30^\circ$ na sua forma clássica. Estes resultados são apresentados na tabela 6.6 e na figura 6.16, onde adicionalmente se representam como referência os resultados obtidos por Müller-Breslau [97] e por Absi e Kérisel [2] para cada valor analisado de ângulo de atrito solo-estrutura, δ , na hipótese prática dos carregamentos serem aplicados ao solo por uma estrutura de suporte, sendo

δ obtido pela seguinte expressão:

$$\tan \delta = \frac{\tau(z)}{\sigma_n(z)} \quad (6.8)$$

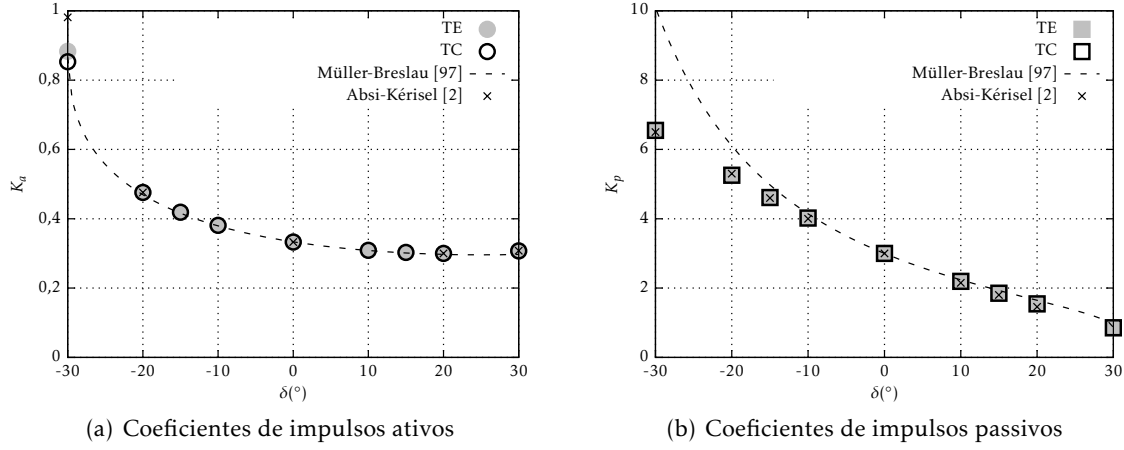


Figura 6.16: Comparação dos resultados de coeficientes de impulsos obtidos para $\phi' = 30^\circ$ com as soluções de Müller-Breslau [97] e de Absi-Kérisel [2]

Os resultados obtidos por Müller-Breslau [97] são baseados na Teoria de Coulomb. Estes resultados são equivalentes a soluções do teorema cinemático, sendo obtidos analiticamente pelas seguintes expressões:

$$K_a^{Müller-Breslau} = \left[\frac{\operatorname{cosec}(\beta_V) \sin(\beta_V - \phi')}{\sqrt{\sin(\beta_V + \delta) + \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \sin(\phi' - i_H)}{\sin(\beta_V - i_H)}}}} \right]^2 \quad (6.9a)$$

$$K_p^{Müller-Breslau} = \left[\frac{\operatorname{cosec}(\beta_V) \sin(\beta_V + \phi')}{\sqrt{\sin(\beta_V - \delta) - \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \sin(\phi' + i_H)}{\sin(\beta_V - i_H)}}}} \right]^2 \quad (6.9b)$$

onde as suas componentes horizontais, K_H , e verticais, K_V , são obtidas respetivamente pelas seguintes equações,

$$K_H^{Müller-Breslau} = K^{Müller-Breslau} \sin(\beta_V + \delta) \quad (6.10a)$$

$$K_V^{Müller-Breslau} = K^{Müller-Breslau} \cos(\beta_V + \delta) \quad (6.10b)$$

Os resultados obtidos por Absi-Kérisel [2] são baseados nos trabalhos de Caquot-Kérisel e correspondem a soluções do teorema estático em que nesta referência as estimativas são apresentadas em forma de tabela.

Na determinação dos impulsos na sua forma clássica, considera-se que o peso volúmico não é afetado pelo multiplicador de carga, α , sendo apenas as tensões normal e de corte aplicadas no paramento vertical que são afetadas por este multiplicador. Logo, as forças nodais originadas pelo peso volúmico pertencem ao vetor das forças constantes e

as forças nodais originadas pelas tensões aplicadas pertencem ao vetor das forças variáveis, contudo em cada um destes cálculos é mantida constante a relação entre as tensões normal e de corte, de acordo com a equação (6.8).

Admite-se assim, que δ é positivo quando as tensões tangenciais estão dirigidas para cima. Tal convenção associa assim, valores positivos de δ à situação habitual no caso da determinação de impulsos ativos e valores negativos deste ângulo à situação habitual da determinação de impulsos passivos.

Para a determinação da estimativa dos valores do par de tensões correspondente ao caso ativo, procurou-se enquadrar o mínimo valor dessas tensões que garantem a estabilidade e, para a estimativa dos valores correspondentes ao caso passivo, procurou-se enquadrar o máximo valor dessas tensões que garantem a estabilidade. Uma vez obtidos os pares de valores $\tau(H)$ e $\sigma_n(H)$ que correspondem a cada situação de colapso calculou-se o respetivo coeficiente de impulso, K , através da seguinte expressão:

$$K = \frac{\sqrt{\tau(H)^2 + \sigma_n(H)^2}}{\gamma H} \quad (6.11)$$

Da análise da tabela 6.6 e da figura 6.16 é possível, em primeiro lugar, constatar a grande proximidade entre os resultados obtidos no presente trabalho usando os teoremas estático (TE) e cinemático (TC) da análise limite. Com efeito, os dois conjuntos de resultados estão praticamente sobrepostos, exceto para $\delta = -30^\circ$ no caso ativo, apresentando um erro de 3.5% e para $\delta = 30^\circ$ no caso passivo, apresentando um erro de 2.0%. O erro referido anteriormente, denominado por erro máximo, é obtido através da seguinte expressão:

$$ERRO_{max} = \frac{|K^{TE} - K^{TC}|}{\min(K^{TE}, K^{TC})} \times 100\% \quad (6.12)$$

Nos restantes casos pode-se dizer que a solução exata está encontrada para uma precisão de duas/três casas decimais. Nos casos particulares referidos, os erros obtidos são negligenciáveis do ponto de vista da engenharia, logo pode-se afirmar que a solução está enquadrada com qualidade elevada de um ponto de vista prático.

Em segundo lugar, verifica-se que tanto no caso ativo como passivo os resultados obtidos se encontram entre os limites estritos previamente obtidos por Müller-Breslau e Absi-Kérisel, exceto para $\delta = -30^\circ$ no caso ativo analisado segundo o teorema cinemático. No caso passivo, os resultados obtidos são praticamente coincidentes com os de Absi-Kérisel, verificando-se o esperado afastamento gradual dos resultados propostos pela Teoria de Coulomb, para $\delta < -10^\circ$.

Nas figuras 6.17 e 6.18, é representado o comportamento na cedência observado das malhas $\delta = -20^\circ, 0^\circ$ e 20° para o caso ativo e passivo, respetivamente. Atendendo a que a dissipação obtida no critério de Mohr-Coulomb com $c' = 0$ é nula, optou-se por reproduzir para as malhas escolhidas, tanto para o teorema cinemático como para o teorema estático da análise limite, o mecanismo de colapso com a distribuição da norma das deformações nos elementos e o mecanismo de colapso com a distribuição dos elementos cujo estado de

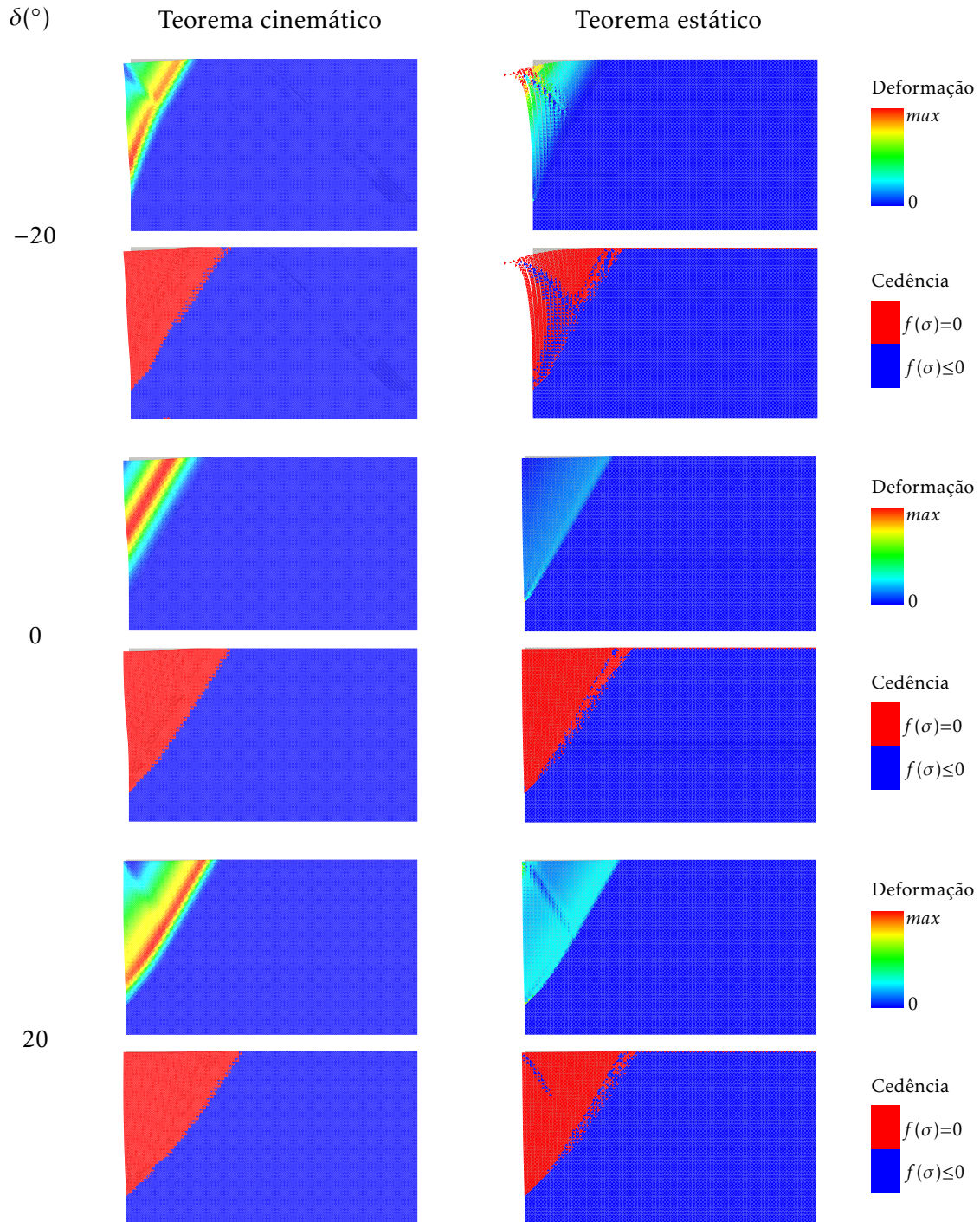


Figura 6.17: Impulsos de terra caso ativo: mecanismos de colapso, distribuição da deformação e da função de cedência nos elementos para $\delta = -20^{\circ}, 0^{\circ}$ e 20°

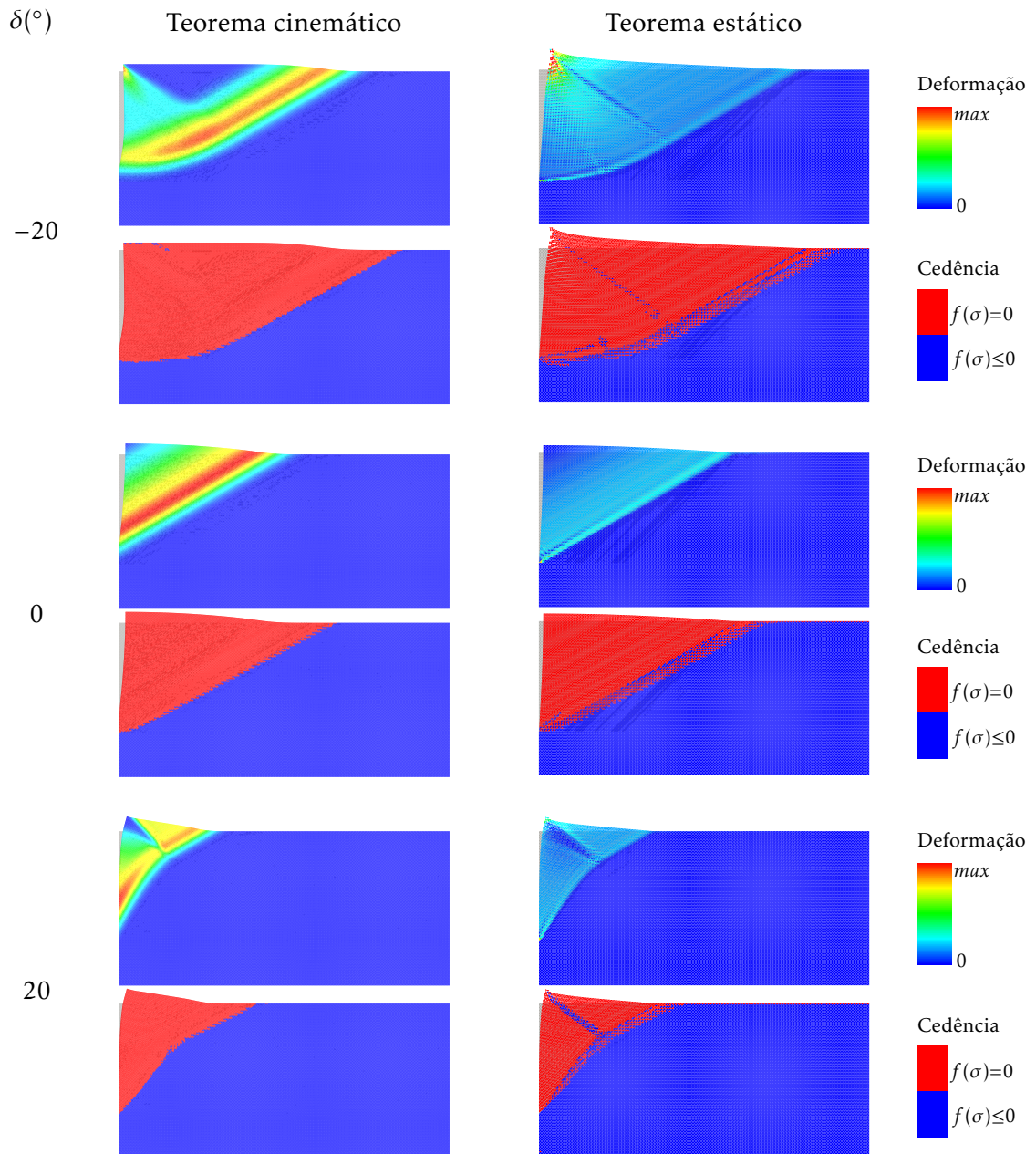


Figura 6.18: Impulsos de terra caso passivo: mecanismos de colapso, distribuição da deformação e da função de cedência nos elementos para $\delta = -20^\circ, 0^\circ$ e 20°

tensão se encontra sobre a superfície de cedência. Nestas figuras, representa-se a cinzento a configuração inicial da malha e a colorido a configuração deformada da malha.

Da análise das figuras 6.17 e 6.18 podem tecer-se os seguintes comentários:

- O mecanismo de colapso, como seria de esperar, é definido por uma superfície de deslizamento que passa pela altura H do paramento vertical. No caso ativo, o deslizamento é no sentido exterior ao paramento vertical e no caso passivo, o deslizamento é no sentido interior ao paramento vertical provocando uma movimentação de solo (volume) neste último caso superior;
- O aspeto da superfície de deslizamento depende do ângulo de atrito solo-estrutura δ . No caso de ser nulo, obtêm-se zonas planares de separação entre o maciço que entra em plasticidade. Para $\delta \neq 0^\circ$ tal não acontece e consoante o seu sinal, causa zonas de separação com curvatura côncava ou convexa. Tal justifica, no caso dos impulsos passivos em que a curvatura é mais evidente, o afastamento da solução de Müller-Breslau das soluções obtidas no presente trabalho;
- Existe uma grande semelhança, para igual situação de carregamento, entre as distribuições (deformação plástica e da função de cedência) obtidas pelo teorema cinemático e pelo teorema estático;
- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático, em contraste e como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo. Apesar disso ambos apresentam a mesma ordem de grandeza, exceto para os casos ativos e passivos considerando $\delta = -20^\circ$.

Para além dos casos de colapso correspondentes aos estados ativo e passivo, realizaram-se adicionalmente cálculos em que apenas uma das tensões (a tangencial) era afetada pelo multiplicador de carregamento, mantendo portanto constante a tensão normal. Assim, nestes cálculos, o ângulo δ não é mantido constante, como se percebe pela equação (6.8).

Deste modo, para uma dada tensão normal procurou-se enquadrar as tensões tangenciais mínima e máxima que garantem a estabilidade. Uma vez determinados os pares de valores $\tau(H)$ e $\sigma_n(H)$ que correspondem a cada situação de colapso, calcularam-se as componentes horizontais, K_H , e verticais, K_V , através das seguintes equações:

$$Impulso_H = \frac{1}{2}K_H\gamma H^2 = \frac{1}{2}H\sigma_n(H) \rightarrow K_H = \frac{\sigma_n(H)}{\gamma H} \quad (6.13a)$$

$$Impulso_V = \frac{1}{2}K_V\gamma H^2 = \frac{1}{2}H\tau(H) \rightarrow K_V = \frac{\tau(H)}{\gamma H} \quad (6.13b)$$

Sendo os resultados obtidos pelo teorema estático e cinemático da análise limite apresentados na tabela 6.7, onde adicionalmente se representam os resultados obtidos por Müller-Breslau [97]. Nesta tabela, não foram representados os resultados propostos por Absi-Kérisel porque apresentam uma grande proximidade aos resultados obtidos no presente trabalho.

Tabela 6.7: Resultados adicionais para $\phi = 30^\circ$ obtidos através da consideração da tensão horizontal constante e da tensão vertical variável

K_H	K_V (Mínimo)			K_V (Máximo)		
	TE	TC	Müller-Breslau [97]	TE	TC	Müller-Breslau [97]
0.5	-0.223	-0.223	-0.230	0.290	0.296	-
1	-0.579	-0.588	-	0.508	0.509	0.536
1.5	-0.866	-0.866	-	0.524	0.524	0.569
2	-1.155	-1.155	-	0.429	0.429	0.461
2.5	-1.444	-1.444	-	0.252	0.252	0.262
3.5	-2.021	-2.021	-	-0.327	-0.327	-0.311

Da análise da tabela 6.7, observa-se igualmente a grande proximidade entre os resultados obtidos no presente trabalho usando os teoremas estático (TE) e cinemático (TC). Com efeito, os dois conjuntos de resultados estão praticamente sobrepostos, sendo o erro máximo obtido, equação (6.12), de 1.6% no cálculo do K_V (Mínimo) para a situação de $K_H = 1$ e 2.2% no cálculo do K_V (Máximo) para a situação de $K_H = 0.5$. Que correspondem a grandezas desprezáveis do ponto de vista da engenharia, portanto, os resultados obtidos delimitam novamente com grande precisão a solução exata.

Na figura 6.19, representa-se o par dos coeficientes de impulsos horizontal e vertical que possibilita tabelar a fronteira de carregamentos limites.

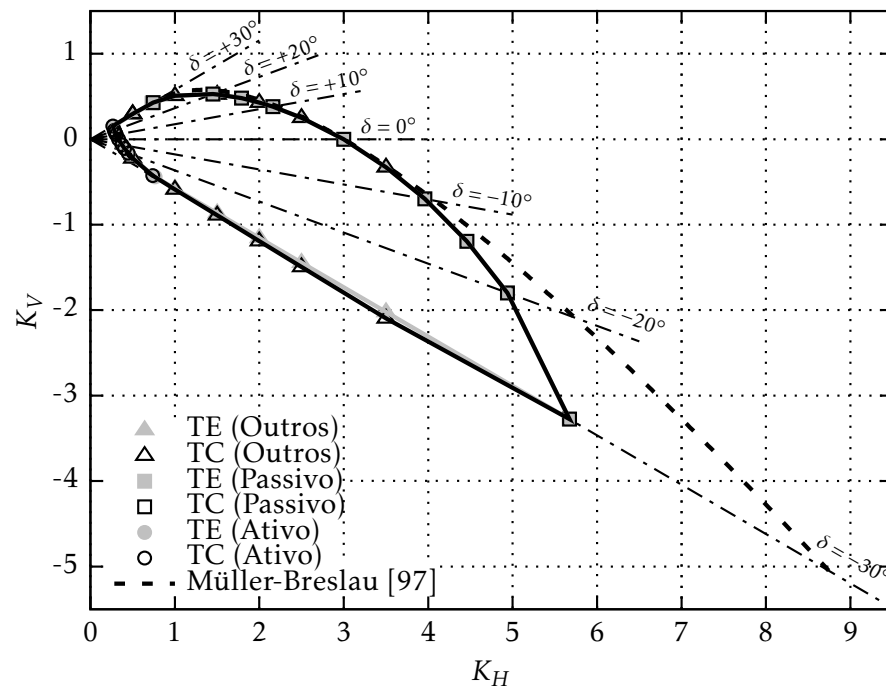


Figura 6.19: Representação das fronteiras dos carregamentos limites

Relacionando as equações (6.8), (6.11) e (6.13) obtém-se:

$$K = \sqrt{K_H^2 + K_V^2} \rightarrow K = \frac{\sigma_n(H)}{\gamma H} \sqrt{1 + \tan^2 \delta} \quad (6.14)$$

o que permite completar a figura 6.19 com os resultados apresentados na tabela 6.6.

O conjunto do teorema estático define um espaço que é interior à fronteira de carregamentos limites e o conjunto do teorema cinemático define por sua vez um espaço que é exterior à fronteira de carregamentos limites. Dada a precisão conseguida nos cálculos realizados, as duas fronteiras são muito próximas, pelo que, difíceis de distinguir. Esta figura permite igualmente verificar o esperado afastamento gradual dos resultados dados por Müller-Breslau, para $\delta < -10^\circ$.

6.3 Problemas tridimensionais

De forma a validar o critério de Tresca e o de Mohr-Coulomb num problema tridimensional de domínio finito, optou-se pelo estudo do problema da esfera oca sob pressão interna [57, 29]. Para validar a implementação numérica dos elementos de extensão tridimensionais, que permitem simular um domínio (semi-)infinito tridimensional, optou-se pelo estudo do problema da análise de estabilidade de taludes.

Para aferir a capacidade e versatilidade tridimensional do algoritmo proposto quando comparado com os algoritmos existentes na literatura, recorreu-se igualmente ao estudo do problema da análise de estabilidade de taludes, bem como ao estudo do problema da capacidade de carga de fundações superficiais quadradas.

Todos os cálculos tridimensionais, em que a dimensão assim o exigiu, foram realizados de um modo paralelo num *cluster* de treze nós constituído por Servidores HP ProLiant. Duas destas máquinas encontram-se equipadas com dois microprocessadores Intel Quad-Core Xeon L535 @2.00GHz, seis máquinas com dois Intel Quad-Core Xeon E5405 @2.00GHz, quatro máquinas com dois Intel Quad-Core Xeon E5504 @2.00GHz e uma máquina com dois Intel Quad-Core Xeon E5606 @2.13GHz. Em todas as máquinas a memória varia de 16Gb a 32Gb, possuindo sempre duas placas de rede Ethernet de 1Gbit/s. Acrescenta-se ainda que as máquinas se encontram interligadas através de uma rede gigabit dedicada. O ambiente do *cluster* é suportado pelo sistema operativo Ubuntu 14.02.

6.3.1 Esfera oca sob pressão interna

O presente problema visa a determinação da capacidade resistente de uma esfera oca sujeita a uma pressão interna. A esfera oca apresenta uma secção esférica definida pelo seu raio interior, r_i , e pelo raio exterior, r_e . A superfície interior da esfera está sujeita a uma força de pressão p . Este problema é representado esquematicamente na figura 6.8(a).

O material que define a esfera oca assume um comportamento homogéneo e isotrópico. Os elementos que definem esta secção apresentam por um lado uma resistência

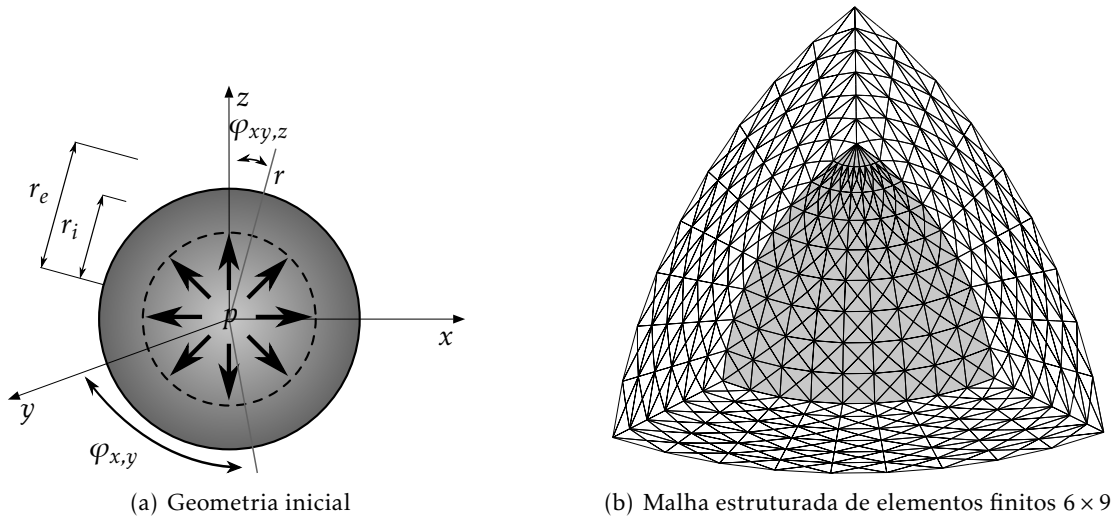




Figura 6.20: Problema da esfera oca sobre pressão interna

puramente coesiva definida pelo critério de Tresca, com coesão c , e por outro lado, uma resistência coesiva-friccional definida pelo critério de Mohr-Coulomb, com coesão c e ângulo de atrito interno, ϕ .

Exploram-se igualmente as condições de simetria do problema de forma a que o número de elementos finitos necessário seja menor. Logo, apenas se discretizou $1/8$ da esfera oca, adicionando para isso as propriedades de simetria nas novas fronteiras, como ilustrado na figura 6.20(b). Na tabela 6.8, define-se a legenda das condições de fronteira. Para a análise segundo o teorema cinemático (TC) expõem-se as restrições ao vetor das velocidades (onde u_n representa o vetor das velocidades normais e u_τ o vetor das velocidades tangenciais) de forma a simular as faces livres (invisíveis), simétricas e carregadas. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais).

Tabela 6.8: Problema da esfera oca sobre pressão interna: condições de fronteira

Fronteiras (faces)	Restrições TC	Restrições TE
	$u_n=0$	$\tau=0$
	-	$\sigma_n = p \text{ \& } \tau=0$
Invisíveis	-	$\sigma_n=\tau=0$

As malhas estruturadas utilizadas para analisar este problema foram definidas com

base numa grelha esférica $n_r \times n_\phi$, sendo n_r e n_ϕ o número de divisões do bloco segundo a direção do raio e segundo a amplitude do ângulo $\phi_{x,y} = \phi_{xy,z} = 90^\circ$, respetivamente. De facto, bastaria resolver o problema considerando $n_\phi = 1$, contudo a rotação das condições de fronteira ainda não se encontra implementada.

Estas malhas foram definidas de forma que os elementos hexaedros dos vértices inferiores representem aproximadamente a forma de um cubo. De seguida cada hexaedro é dividido em vinte e quatro tetraedros, onde cada tetraedro deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado no centroide de uma das faces, e por último um nó central correspondente ao baricentro do hexaedro, como ilustrado na figura 4.3.

Por fim, cada prisma triangular é dividido em catorze tetraedros, onde cada tetraedro é formado por um nó central correspondente ao baricentro do prisma e por três nós posicionados nos vértices da face triangular ou, no caso de se tratar de uma face quadrangular, por dois nós posicionados nos vértices desta face e pelo nó localizado no centroide dessa face, como ilustrado na figura 5.10.

Na figura 6.20(b) mostra-se para um caso grosseiro (6×9) o tipo de malha de elementos finitos utilizado para analisar este problema. No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC) considerou-se que seriam modelados por elementos quadráticos subparamétricos (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por elementos lineares isoparamétricos (tabela 4.3).

A esfera oca sob pressão interna corresponde a um exemplo pouco usual na literatura da análise limite, não existindo do conhecimento do autor, qualquer artigo publicado sobre soluções da análise limite para este problema. A solução deste problema para o caso do material ser definido pelo critério de Tresca foi proposta por Hill [57], e para o caso do critério de Mohr-Coulomb por Yu [161]. Segundo Yu [161] o multiplicador de carga de colapso exato (α^*), em que $\alpha = \frac{p}{c}$, é obtida pela seguinte fórmula,

$$\alpha^* = \frac{2 \cos \phi}{1 - \sin \phi} \left(\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\left(\frac{2(\zeta-1)}{\zeta} \right)} - 1 \right) \quad (6.15)$$

onde ζ é uma constante de um material atrítico definida pela equação (6.3).

Como se constata pela observação da equação (6.15) quando $\phi = 0^\circ$ a solução torna-se indeterminada. Assim, para o critério de Tresca, esta equação converte-se no seu limite quando $\phi \rightarrow 0^\circ$, resultando em,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \alpha^* = 4 \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad (6.16)$$

que corresponde exatamente à solução exata obtida anteriormente por [57]. Analisou-se o rácio de $\frac{r_e}{r_i} = 2$ para diferentes ângulos de atrito, ϕ , apresentando-se na tabela 6.9 os valores exatos dos multiplicadores da carga de colapso.

Neste exemplo pretende-se, em primeiro lugar, mostrar a evolução da solução com o aumento de refinamento, sendo os resultados obtidos apresentados na tabela 6.10. Onde

Tabela 6.9: Esfera oca sobre pressão interna: multiplicadores da carga de colapso exatos

	$\phi(^{\circ})$			
	0	15	30	45
α^*	2.7726	2.8676	2.6324	2.1533

α^{TC} e α^{TE} , correspondem respetivamente, às estimativas obtidas segundo a aplicação do teorema cinemático e estático da análise limite. Por fim, reforça-se que os cálculos realizados com $\phi = 0^{\circ}$ foram realizados utilizando o critério de Tresca.

Tabela 6.10: Esfera oca sobre pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento

$\phi(^{\circ})$	0		15		30		45	
Malha ($n_r \times n_{\varphi}$)	α^{TE}	α^{TC}	α^{TE}	α^{TC}	α^{TE}	α^{TC}	α^{TE}	α^{TC}
2×3	2.3896	2.7849	2.4265	2.8686	2.1745	2.6386	1.7503	2.1654
4×6	2.6582	2.7755	2.7409	2.8681	2.5019	2.6352	2.0378	2.1572
6×9	2.7191	2.7739	2.8090	2.8679	2.5721	2.6340	2.0994	2.1564
8×12	2.7418	2.7733	2.8339	2.8678	2.5978	2.6332	2.1221	2.1563
10×15	2.7526	2.7731	2.8458	2.8677	2.6099	2.6327	2.133	2.1547
12×18	2.7585	2.7729	2.8523	2.8677	2.6166	2.6327	2.139	2.1537
14×21	2.7622	2.7728	2.8563	2.8676	2.6207	2.6326	2.1426	2.1535
16×24	2.7646	2.7728	2.8589	2.8676	2.6234	2.6326	2.1451	2.1534
18×27	2.7662	2.7727	2.8607	2.8676	2.6255	2.6325	2.1467	2.1534
20×30	2.7674	2.7727	2.8620	2.8676	2.6266	2.6325	2.1479	2.1534

Da análise da tabela 6.10, conclui-se que os resultados obtidos são bastante satisfatórios mesmo para graus de refinamento mais grosseiros. Este facto, verifica-se principalmente para os resultados obtidos pelo teorema cinemático.

O multiplicador de carga de colapso escalado para o caso do teorema cinemático ($\alpha^{\text{TC}}/\alpha^*$) apresenta no máximo o valor de 1.0056 ($\phi = 45^{\circ}$, malha 2×3), por outro lado, para o caso do teorema estático o multiplicador de carga de colapso escalado ($\alpha^{\text{TE}}/\alpha^*$) apresenta no mínimo o valor de 0.8128 (para a mesma situação). O erro real, equação (6.1), obtido para o caso do teorema cinemático apresenta o valor de 0.56%, que é desprezável no ponto de vista da engenharia. Contudo, o mesmo não se verifica para o erro real obtida pelo teorema estático, que apresenta o valor de 18.72%. Neste caso, só a partir da malha 8×12 é que os valores obtidos apresentam um erro desprezável no ponto de vista da engenharia (< 2%).

Neste exemplo, para o mesmo nível de refinamento, a formulação baseada no teorema cinemático apresenta uma maior proximidade à carga de colapso exata do que a formulação baseada no teorema estático. Contudo, esta diferença tende a diminuir com o aumento

do refinamento da malha de elementos finitos.

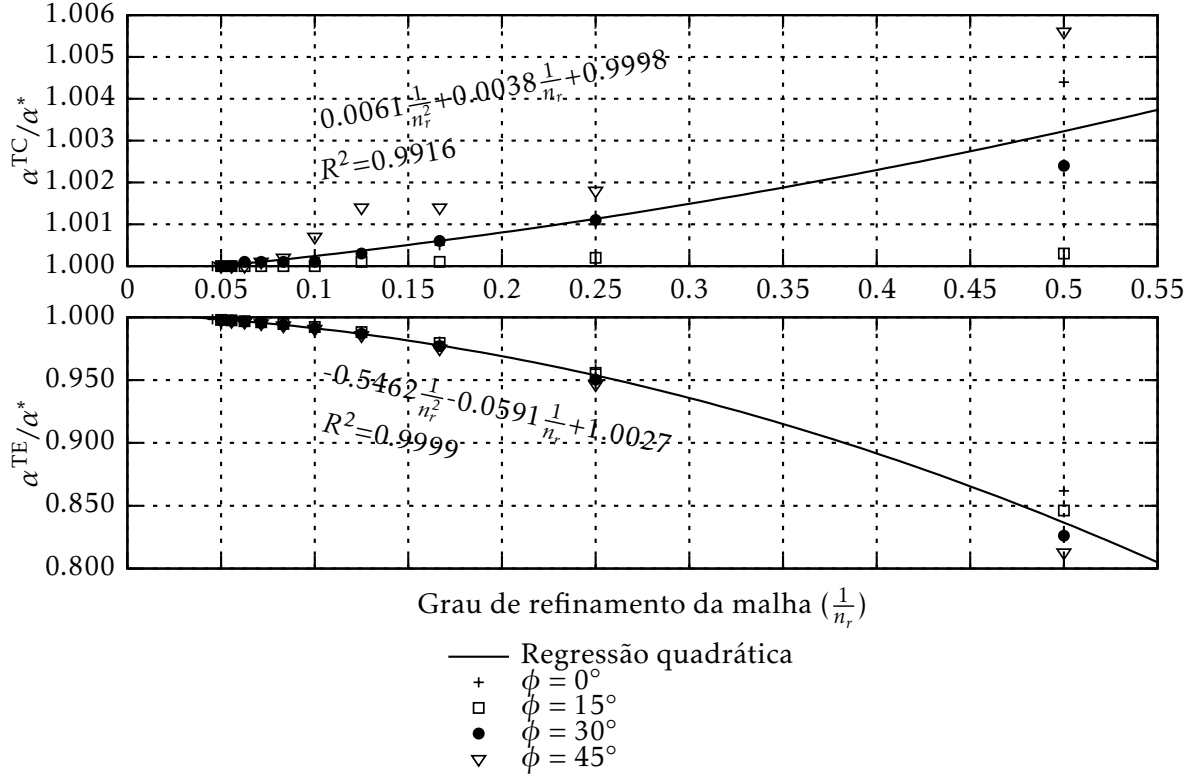


Figura 6.21: Esfera oca sobre pressão interna: evolução da carga de colapso como uma função do refinamento

Na figura 6.21, representam-se os resultados em termos de $\frac{\alpha}{\alpha^*}$ em função do grau de refinamento da malha obtidos recorrendo ao teorema estático como ao teorema cinemático, ajustando a cada um destes conjuntos uma regressão quadrática média. Nesta figura a escala vertical utilizada para representar os resultados obtidos pelo teorema cinemático é inferior à escala utilizada para representar os resultados obtidos pelo teorema estático, de forma a permitir uma melhor compreensão dos resultados.

As regressões quadráticas médias obtidas apresentam uma forte correlação com os dados, onde o coeficiente de determinação como se pode constatar, assume valores muito próximos de 1 ($R \simeq 1$). Desta forma, é possível considerar que o erro $O(\frac{1}{n_r^2})$ é uma função do grau de refinamento da malha. Este facto permite extrapolar com grande precisão o valor do multiplicador de carga de colapso para cada caso de ϕ . Bastando para isso, obter o limite da expressão da regressão quadrática específica quando o grau de refinamento da malha tende para zero ($\frac{1}{n_r} \rightarrow 0$). O valor limite da regressão quadrática média para o teorema estático é ligeiramente superior ao obtido pelo teorema cinemático, que corresponde a erros de arredondamentos. Este facto origina igualmente que o valor limite da regressão quadrática média para o teorema cinemático seja menor que um e que o valor limite da regressão quadrática média para o teorema estático seja superior a um.

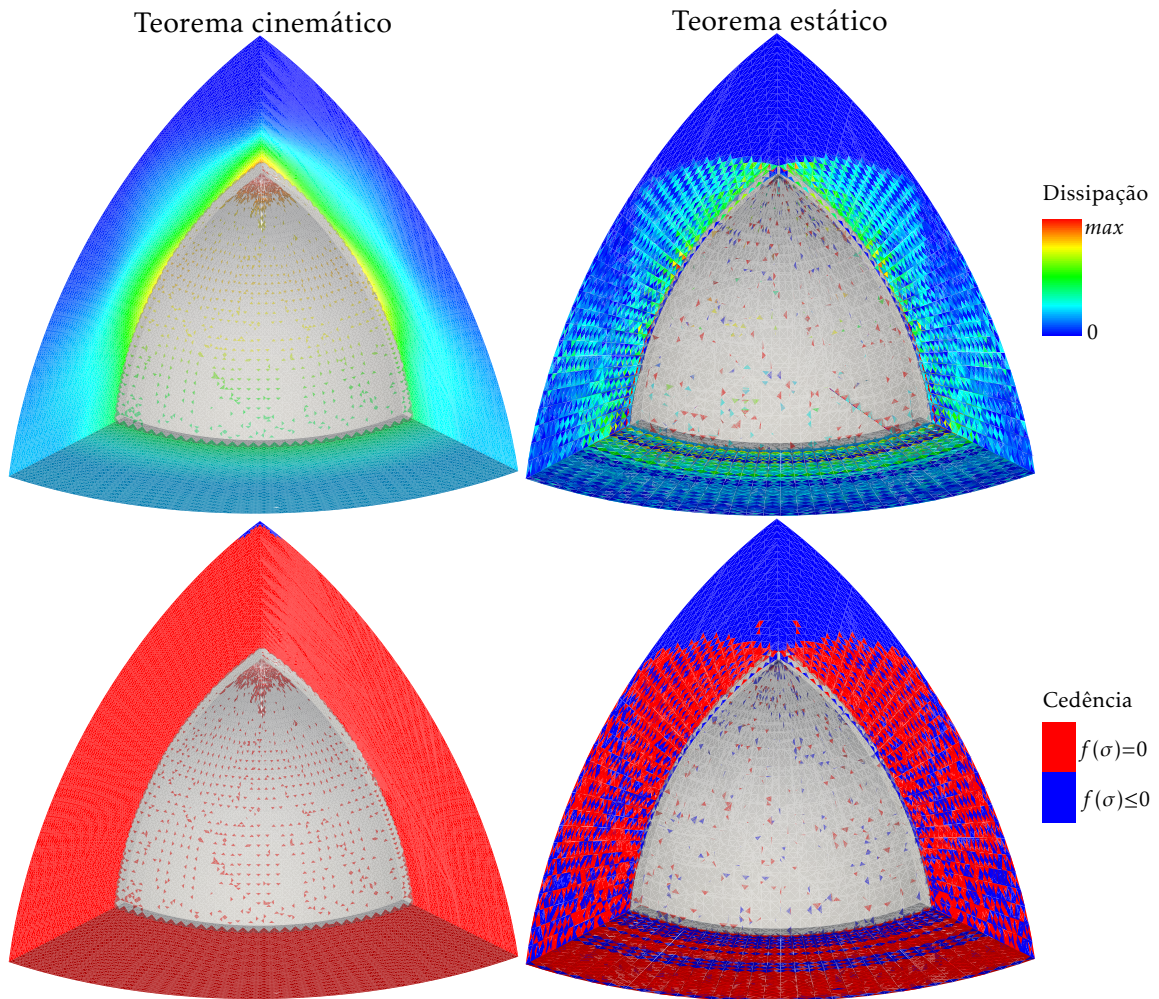


Figura 6.22: Esfera oca sobre pressão interna: mecanismos de colapso, distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos para a malha 20×30

Na figura 6.22, representa-se o comportamento na cedência observado das malhas obtidas para os cálculos realizados segundo o teorema cinemático e estático da análise limite. Assim, optou-se por reproduzir para a malha mais refinada (20×30) com $\phi = 0^\circ$ o mecanismo de colapso e a distribuição da dissipação plástica nos elementos. Igualmente, nesta malha, escolheu-se retratar o mecanismo de colapso e a distribuição dos elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência. Nesta figura, representa-se a cinzento a configuração inicial da malha e a colorido a configuração deformada da malha.

Da análise da figura 6.22 podem tecer-se os seguintes comentários:

- O mecanismo de colapso é definido por um deslocamento radial de expansão de todos os elementos, diminuindo a sua intensidade com o aumento da distância ao centro da esfera oca;
- Existe uma boa semelhança entre as distribuições obtidas pelo teorema cinemático e pelo teorema estático sendo esta semelhança mais evidente no caso da dissipação plástica do que com a distribuição da função de cedência;

- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático, em contraste e como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo. Apesar disso ambos apresentam a mesma ordem de grandeza;




Por fim, para o caso do material ser definido por uma resistência puramente coesiva optou-se por analisar as mesmas malhas geradas para o caso do teorema cinemático (TC), considerando neste caso que seriam modeladas por elementos lineares isoparamétricos (tabela 4.1). Para todos os casos analisados não se conseguiu obter convergência, isto é, a estimativa de colapso obtida tende sempre a aumentar. Este facto demonstra a existência de fenómenos de *locking*, que se deve sobretudo aos elementos quadráticos apresentarem um maior número de graus de liberdade o que permite a estabilização da solução.

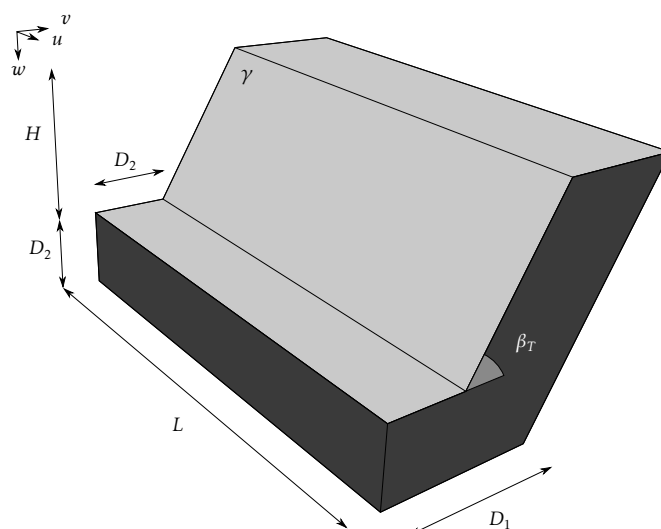
6.3.2 Estabilidade de Taludes

O presente problema visa o estudo da estabilidade de taludes finitos em maciços, cujo modelo geométrico é representado esquematicamente na figura 6.23(a). A geometria do problema é definida por um terreno com dois níveis de solo horizontais, separados por um talude com inclinação β_T . A diferença de cotas dos níveis horizontais de solo define a altura H . A largura é definida por L e o modelo é ainda definido pela profundidade abaixo do nível horizontal inferior (D_2) e pela dimensão horizontal deste nível de terreno (D_1). Considerou-se que a dimensão D_2 definiria igualmente a dimensão horizontal superficial do nível horizontal inferior. As dimensões D_1 e D_2 foram escolhidas de forma a minimizarem a influência das condições de fronteira na determinação da carga de colapso.

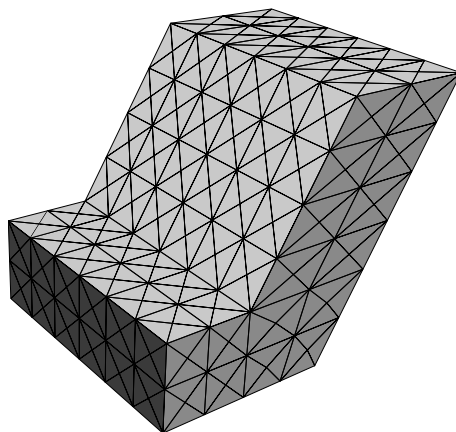
Em termos de carregamentos o solo está apenas sujeito ao seu peso próprio, γ . O material que define este terreno assume um comportamento homogéneo e isotrópico. Os elementos que definem este solo apresentam uma resistência coesiva-friccional definida pelo critério de Mohr-Coulomb, com coesão efetiva c' e ângulo de resistência ao corte, ϕ' .

Tabela 6.11: Estabilidade de taludes: condições de fronteira

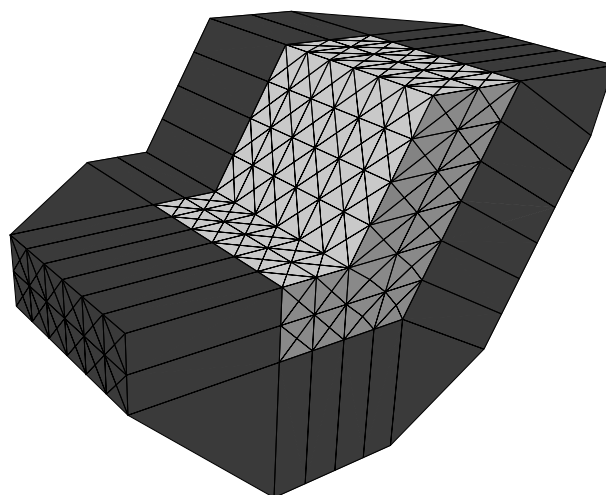
Fronteiras (faces)	Restrições TC	Restrições TE
	-	$\sigma_n = \tau = 0$
	$u = 0$	$\tau = 0$
	$u = v = w = 0$	Extensão
Invisíveis	$u = v = w = 0$	Extensão



(a) Geometria inicial



(b) Malha estruturada de elementos finitos
 $n_H = 4$ (TC e TE sem extensão)



(c) Malha estruturada de elementos finitos $n_H = 4$ (TE com extensão)

Figura 6.23: Problema de estabilidade de taludes

Exploram-se igualmente as condições de simetria do problema de forma a que o número de elementos finitos necessário para realização dos cálculos seja menor. Logo, apenas se discretizou metade do talude, adicionando para isso as propriedades de simetria nas novas fronteiras, como ilustrado na figura 6.23(b). Na tabela 6.11 é representada a legenda das diversas condições de fronteira. Para a análise segundo o teorema cinemático (TC), expõem-se as restrições ao vetor das velocidades (u, v, w) de forma a simular as faces livres, simétricas e bloqueadas. Para a análise segundo o teorema estático (TE), expõem-se as restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais) de forma a simular as faces livres, simétricas e de extensão.

As malhas estruturadas utilizadas para analisar este problema foram definidas com base numa grelha regular de dimensões H/n_H , de forma que o elementos hexaedros do nível inferior representem aproximadamente a forma de um cubo, sendo n_H o número de divisões na dimensão da altura, H . De seguida cada hexaedro é dividido em vinte e quatro tetraedros, onde cada tetraedro deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado no centroide de uma das faces, e por último um nó central correspondente ao baricentro do hexaedro, como ilustrado na figura 4.3.

Na figura 6.23(b), mostra-se um exemplo deste tipo de malha de elementos finitos utilizada para o caso de $n_H = 4$. Os cálculos realizados foram executados com uma malha de elementos finitos mais refinada. No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC), considerou-se que seriam modelados por tetraedros de dez nós permitindo aproximações quadráticas ao campo das velocidades (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por tetraedros de quatro nós permitindo aproximações lineares ao campo das tensões (tabela 4.3).

O objetivo deste problema corresponde em validar os resultados para casos de problemas semi-infinitos, por isso no caso do teorema estático, realizaram-se os cálculos numa primeira fase sem extensão, sendo posteriormente validados através dos cálculos obtidos pelo método de extensão implementado, representado esquematicamente pela figura 6.23(c). Nesta figura, expõe-se igualmente as restrições ao tensor das tensões.

Neste exemplo, pretende-se em primeiro lugar obter os números de estabilidade, $\gamma H/c$, que conduzem ao colapso para diferentes rácios H/L (0, 1/5, 1/3, 1 e 2), para diferentes ângulos de inclinação β_T (30°, 60° e 90°) e para três ângulos de resistência ao corte diferentes ϕ' (20°, 30° e 40°). Como o talude é sempre estável para $\phi' \geq \beta_T$, logo no caso de $\beta_T = 30^\circ$ apenas se analisou a situação onde o ângulo de resistência ao corte é $\phi' = 20^\circ$.

Segundo Michalowski [98] foi possível verificar que o número de estabilidade, $\gamma H/c$, é constante para um mesmo valor dos parâmetros, ϕ' , β_T e H/L , sendo esta afirmação confirmada através da determinação do número de estabilidade para diferentes valores de H e c (mantendo constante os restantes parâmetros). Por fim, menciona-se que os cálculos realizados com $H/L = 0$ foram realizados considerando o caso bidimensional em condições de deformação plana.

Na tabela 6.12 e na figura 6.24, representam-se então as estimativas obtidas tanto pelo teorema cinemático como pelo teorema estático da análise limite para o número de

Tabela 6.12: Resultados do número de estabilidade como uma função do rácio H/L para diferentes valores de β_T e ϕ'

$\phi'(^{\circ})$	H/L	$\beta_T = 30^{\circ}$			$\beta_T = 60^{\circ}$			$\beta_T = 90^{\circ}$		
		TE	TC	Michalowski [98]	TE	TC	Michalowski [98]	TE	TC	Michalowski [98]
20	0	40.51	40.59	41.22	10.31	10.33	10.38	5.47	5.49	5.50
	1/5	43.81	44.94	45.23	10.80	11.06	11.10	5.78	5.98	6.02
	1/3	46.73	47.75	48.85	11.39	11.64	11.66	6.13	6.34	6.82
	1	67.16	68.80	75.96	14.87	15.18	15.75	8.23	8.47	9.09
	2	106.86	111.35	-	21.74	22.31	-	12.34	12.80	-
30	0				15.93	15.97	15.98	6.65	6.68	6.72
	1/5				16.63	17.07	17.07	6.98	7.26	7.27
	1/3				17.52	17.83	17.87	7.40	7.65	7.97
	1				22.72	23.37	23.84	10.03	10.34	11.03
	2				33.66	34.80	-	15.43	16.16	18.29
40	0				28.94	29.00	29.17	8.24	8.31	8.31
	1/5				30.53	31.74	31.84	8.70	9.12	9.12
	1/3				31.48	32.94	33.37	9.10	9.49	9.75
	1				40.15	42.18	43.58	12.39	12.87	13.46
	2				58.81	62.39	-	19.38	20.24	-

estabilidade como uma função do rácio H/L para diferentes valores de β_T e ϕ . Adicionalmente nesta tabela/figura são representados os resultados obtidos por Michalowski [98]. Na figura 6.24 a escala vertical é representada em escala logarítmica, de forma a permitir uma melhor leitura dos resultados.

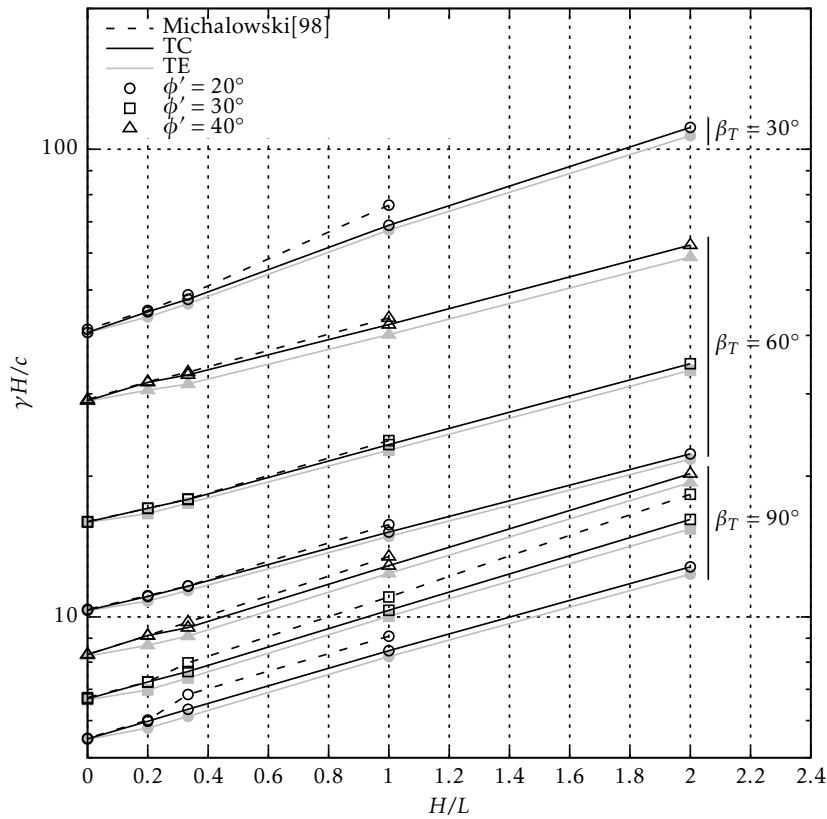


Figura 6.24: Comparação das estimativas obtidas do número de estabilidade com as soluções de Michalowski [98]

Os resultados obtidos por Michalowski [98] correspondem aos melhores valores obtidos pelo teorema cinemático existentes na literatura. Segundo este trabalho, que utiliza mecanismos definidos analiticamente na obtenção dos seus resultados, considera-se que o mecanismo de colapso apresenta a forma de um cone curvilíneo, também conhecido por “chifre”. O processo de minimização reside então na procura do menor valor do número de estabilidade através da variação incremental distinta dos quatro parâmetros que definem esta superfície de deslizamento. Os resultados obtidos neste processo são apresentados graficamente, o que provoca que a precisão destes seja um pouco subjetiva.

Da análise da tabela 6.12 e da figura 6.24 é possível constatar a grande proximidade entre os resultados obtidos pelo teorema cinemático e estático da análise limite, verificando-se em alguns casos que o valor exato de $\gamma H/c$ foi obtido de um ponto de vista prático.

Como seria de esperar o número de estabilidade depende diretamente do ângulo ϕ' e inversamente do ângulo β_T .

Os resultados permitem igualmente observar o efeito tridimensional no cálculo da estabilidade de taludes. De facto, o rácio do valor de $\gamma H/c$ para $H/L = 2$ é superior 2 a 2.75 vezes o valor do número de estabilidade para $H/L = 0$. Esta tendência dos resultados é igualmente comprovada pelos resultados do teorema cinemático obtidos por [98].

Os resultados obtidos referentes ao teorema cinemático da análise limite melhoraram ou igualaram sempre os resultados obtidos por Michalowski [98], em que no máximo a melhoria corresponde a 13.21% para $\phi' = 30^\circ$, $H/L = 2$ e $\beta_T = 90^\circ$. Este valor provem da aplicação da seguinte expressão:

$$MELHORIA = \frac{\gamma H/c^{Michalowski} - \gamma H/c^{TC}}{\min(\gamma H/c^{Michalowski}, \gamma H/c^{TC})} \times 100\% \quad (6.17)$$

O erro entre as estimativas obtidas pelo teorema estático e cinemático é muito reduzido, apresentando no pior caso um erro de 6% (para $\phi = 40^\circ$, $H/L = 2$ e $\beta_T = 60^\circ$) que corresponde a um erro aceitável no ponto de vista da engenharia. O erro referido anteriormente, denominado por erro máximo, é obtido através da seguinte expressão:

$$ERRO_{max} = \frac{|\gamma H/c^{TE} - \gamma H/c^{TC}|}{\min(\gamma H/c^{TE}, \gamma H/c^{TC})} \times 100\% \quad (6.18)$$

Nas figuras 6.25, 6.26 e 6.27, representa-se no plano de simetria e de planta, o comportamento na cedência observado nos diferentes casos analisados. Assim, no caso do teorema cinemática da análise limite, optou-se por reproduzir para as malhas escolhidas a distribuição da dissipação plástica nos elementos. Por outro lado, para o caso do teorema estático da análise limite, optou-se por reproduzir para as malhas escolhidas a distribuição dos elementos cujo estado de tensão está sobre a superfície de cedência.

Na figura 6.25, para o talude com $\beta_T = 60^\circ$ e $H/L = 1$ é demonstrado graficamente a influência do ângulo ϕ' . Por outro lado, na figura 6.26, para o talude com $\beta_T = 60^\circ$ e $\phi' = 30^\circ$ é demonstrado graficamente a influência do rácio H/L . Finalmente, na figura

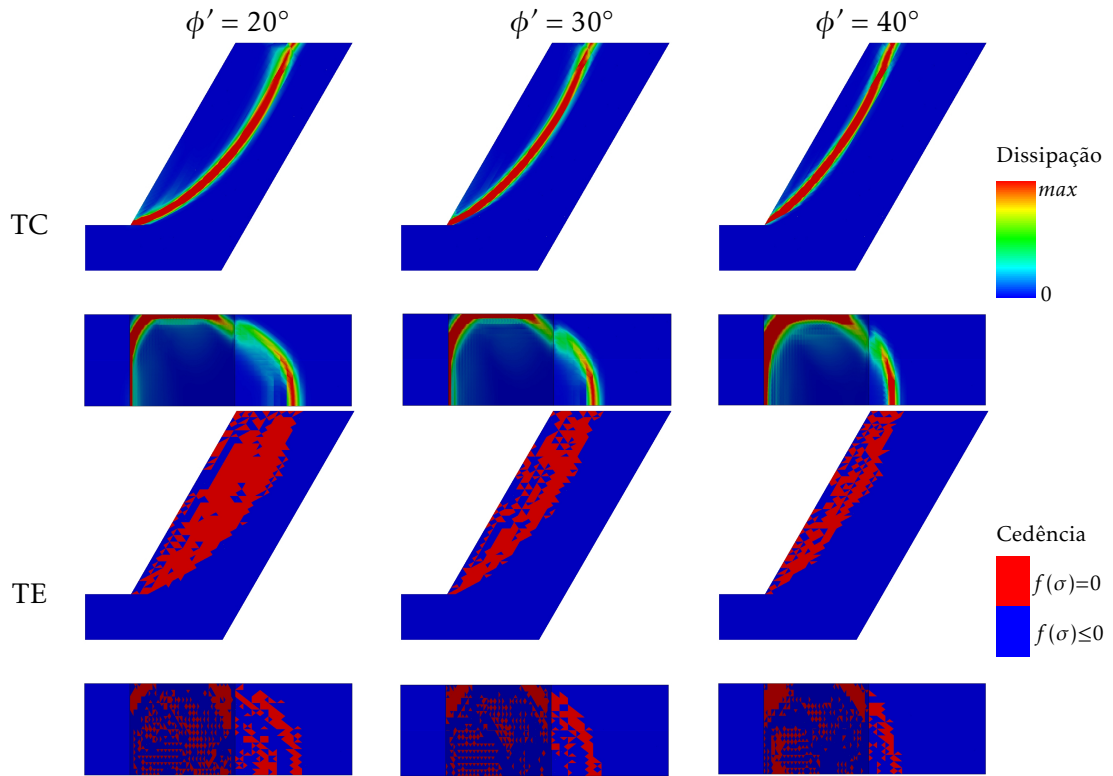


Figura 6.25: Talude com $\beta_T = 60^\circ$, $H/L = 1$ e diferentes valores de ϕ' : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos

6.27, para o talude com $\phi' = 20^\circ$ e $H/L = 1$ é demonstrado graficamente a influência da inclinação do talude β_T .

Da análise destas figuras podem tecer-se os seguintes comentários:

- Os mecanismos de colapso são definidos por uma superfície de deslizamento que intersesta a base do talude, separando claramente a massa do solo que apresenta movimento semelhante a um corpo rígido, da massa de solo que não sofre qualquer deslocamento;
- Existe uma grande semelhança entre a distribuição da dissipação plástica e a distribuição da função de cedência, que está de acordo com a proximidade dos valores de $\gamma H/c$. Esta semelhança torna-se praticamente numa coincidência no caso 2D, onde o refinamento da malha é mais elevado;
- O caso do teorema cinemático apresenta zonas de dissipação plástica relativamente concentradas, sugerindo a existência de superfícies de deslizamento;
- O aspeto da zona de cedência depende do ângulo de resistência ao corte. Quanto maior o ângulo de resistência ao corte, menor será a massa de solo instável, provocando que a zona de deslizamento se aproxime da face do talude;

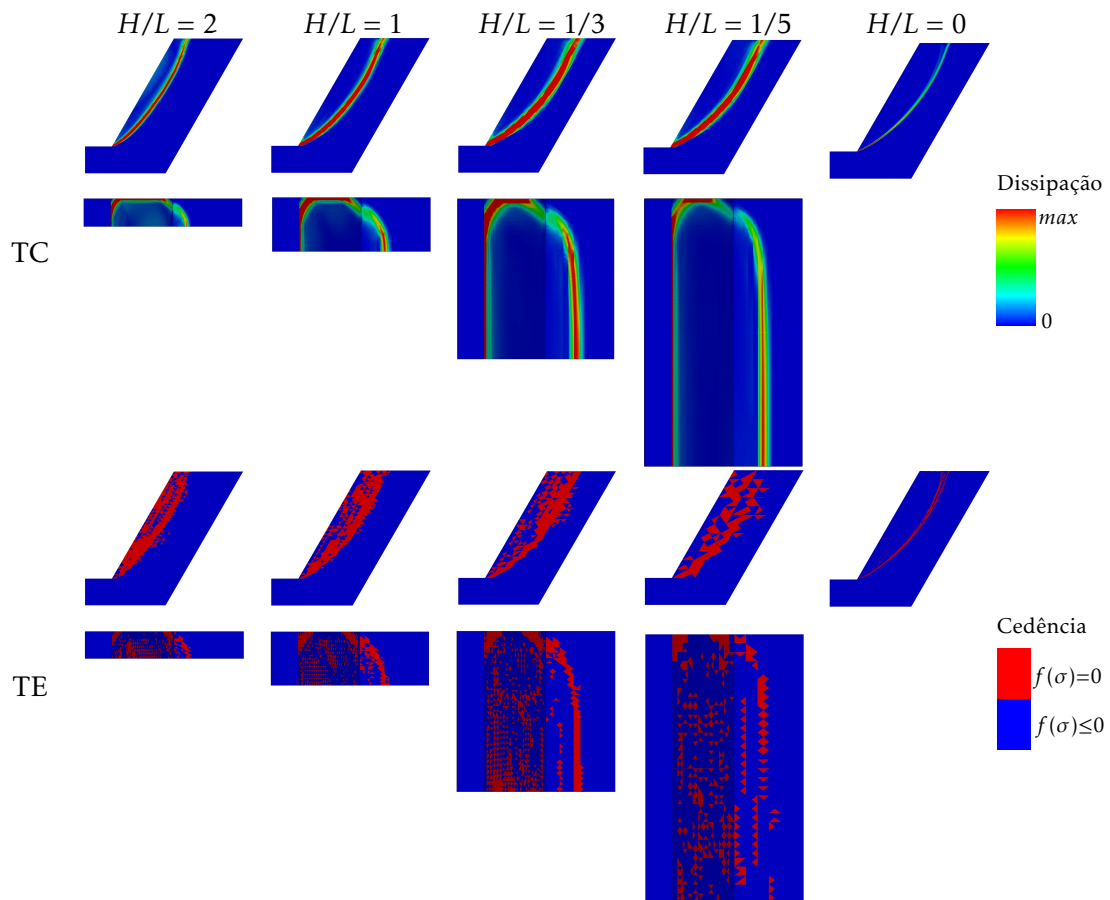


Figura 6.26: Talude com $\beta_T = 60^\circ$, $\phi' = 30^\circ$ e diferentes valores de H/L : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos

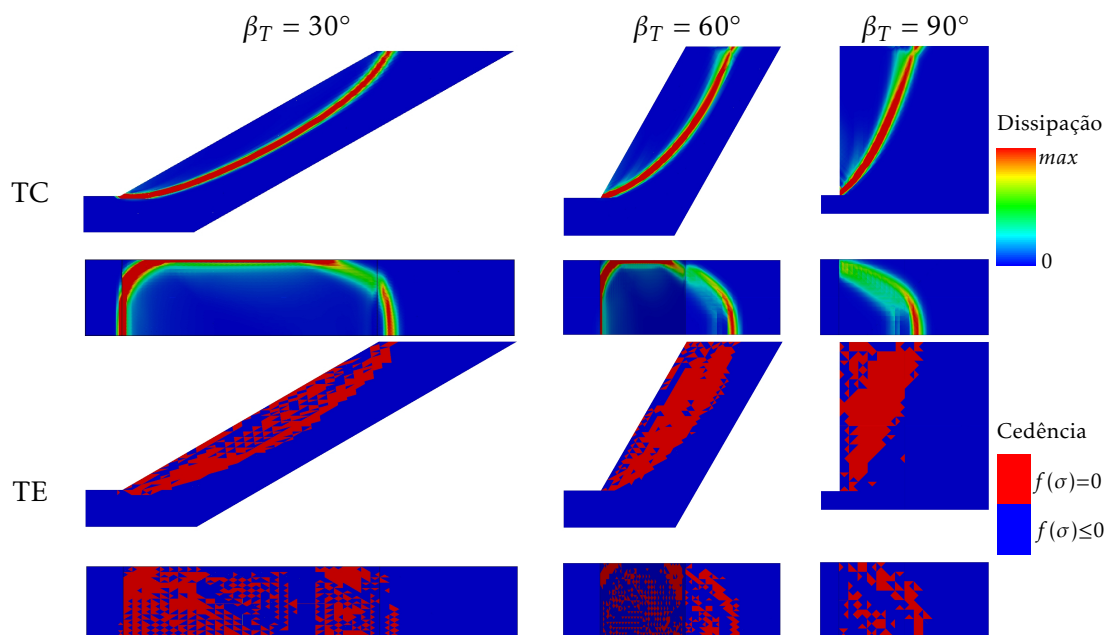


Figura 6.27: Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1$ e diferentes valores de β_T : distribuição da dissipação plástica e da função de cedência nos elementos

- O aspeto da zona de cedência depende do rácio H/L . Quanto maior o valor do rácio, menor será a massa de solo instável provocando que a zona de deslizamento se aproxime da face do talude, mais visível no terreno horizontal superior. Este efeito é pouco evidente para os casos em que $H/L < 1/3$, porque a partir destes casos o mecanismo já apresenta a configuração 2D em deformação plana ($H/L = 0$). Esta situação, onde o efeito 3D é pouco evidente é comprovado, pois o valor de estabilidade apenas difere do valor obtido em deformação plana numa percentagem inferior a 11%.
- O aspeto da zona de cedência depende do ângulo de inclinação do talude. Quanto menor o ângulo de inclinação do talude, menor será a massa de solo instável provocando que a zona de deslizamento se aproxime da face do talude.

Por fim, para o caso do talude apresentar $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$ pretende-se mostrar a evolução da solução com o aumento da dimensão condicionante D_1 mantendo constante a dimensão dos elementos finitos. Para isso, considerou-se que a profundidade D_2 seria constante e que a condição de fronteira afetada por esta dimensão não afetaria o valor da carga de colapso obtida. Os resultados obtidos são apresentados numericamente na tabela 6.13 e graficamente na figura 6.28.

No que diz respeito às malhas 3D só existe implementada a possibilidade de geração de um tipo de elementos de extensão. Este método, corresponde ao caso do 1º método extrapolado para o caso tridimensional, que como se viu anteriormente, corresponde ao caso que apresenta mais elementos do tipo unidirecional em relação aos outros tipos de elementos de extensão.

Tabela 6.13: Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$: evolução numérica da carga de colapso como uma função da profundidade

$D_1 - D_2$	TE (Extensão)	TE	TC
0.2	10.71	11.04	11.62
0.3	10.76	10.80	11.10
0.4	10.77	10.80	11.06
0.5	10.79	10.80	11.06
0.6	10.80	10.80	11.06

A análise destes resultados permite concluir que o aumento da dimensão ($D_1 - D_2$) provoca o aumento da carga de colapso no caso do teorema estático com extensão e a diminuição da carga de colapso no caso do teorema cinemático e estático (sem extensão) até atingir um patamar. Existe uma diferença entre os patamares atingidos pelo teorema estático e cinemático dado que o refinamento utilizado nesta análise não foi suficientemente reduzido.

Quando a profundidade ($D_1 - D_2$) é condicionante, os resultados obtidos pelo teorema estático considerando extensão são inferiores aos resultados obtidos sem extensão, estando de acordo com o enunciado anteriormente no exemplo bidimensional de fundações superficiais corridas (secção 6.2.3). Este facto é justificado, porque o problema numérico que estamos a resolver não é o mesmo, dado que a introdução de elementos de extensão provoca a consideração de restrições adicionais nas fronteiras. Estas restrições provocam que o campo de tensões obtido nas fronteiras deixe de ser ilimitado (pode assumir qualquer valor), para passar a obedecer a limitações ao seu gradiente. O que consequentemente provoca a diminuição da carga de colapso do problema para o caso em que se considera extensão.

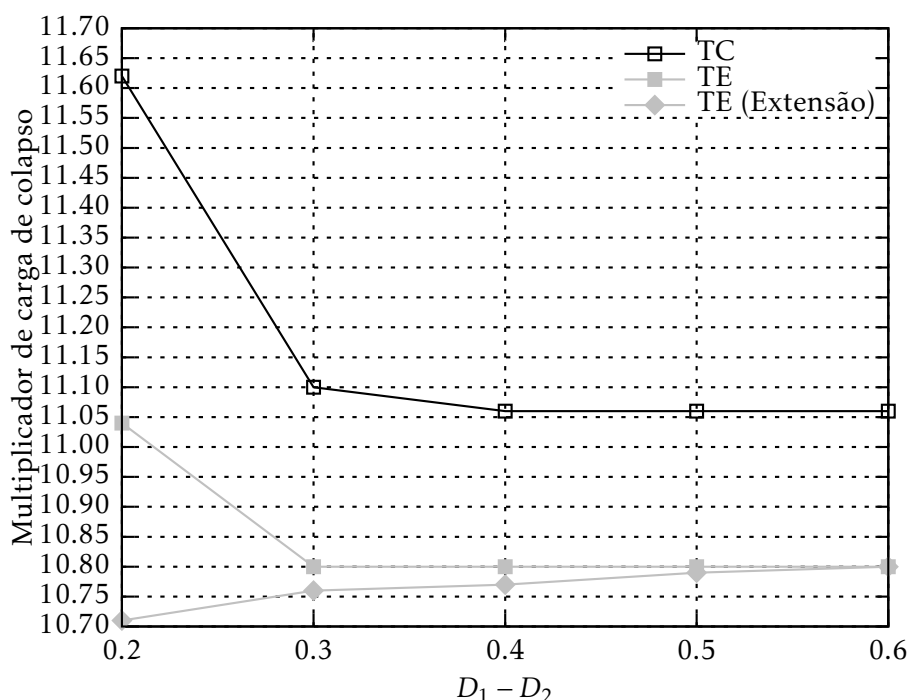


Figura 6.28: Talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$: evolução gráfica da carga de colapso como uma função da profundidade

Este raciocínio permitiu escolher, para o talude com $\phi' = 20^\circ$, $H/L = 1/5$ e $\beta_T = 60^\circ$, a profundidade ($D_1 - D_2$) = 0.5 como a dimensão a partir da qual não se afeta o valor da estimativa da carga de colapso obtida pelo teorema estático e pelo teorema cinemático da análise limite.

Seguiu-se um raciocínio semelhante em todos os cálculos apresentados (TC e TE) na tabela 6.12, de forma não só a permitir que as estimativas obtidas correspondam a limites estritos da carga de colapso deste problema (TE), como a permitir a obtenção da melhor estimativa possível (TC).

6.3.3 Fundações superficiais quadradas

O presente problema visa o estudo da capacidade resistente de um maciço sujeito a ações verticais aplicadas sob uma fundação superficial quadrada. O modelo geométrico é representado esquematicamente na figura 6.29.

Este problema é definido por uma sapata quadrada rígida de lado B_s , aplicada sob um terreno de altura H e de lado $2L + B_s$, sendo L a largura do terreno de um dos lados da sapata. As dimensões H e L foram escolhidas de forma a minimizarem a influência das condições de fronteira na determinação da carga de colapso, para isso seguiu-se o mesmo raciocínio apresentado no problema da análise da estabilidade de taludes em maciços, estudado na secção 6.3.2.

O material que define este terreno assume um comportamento homogêneo e isotrópico. Considera-se que o contacto entre a sapata e o solo é perfeitamente rugoso. O único carregamento variável deste problema corresponde à carga distribuída centrada vertical, p , aplicada na sapata. O peso próprio do solo, γ , pertence ao conjunto de carregamentos constantes.

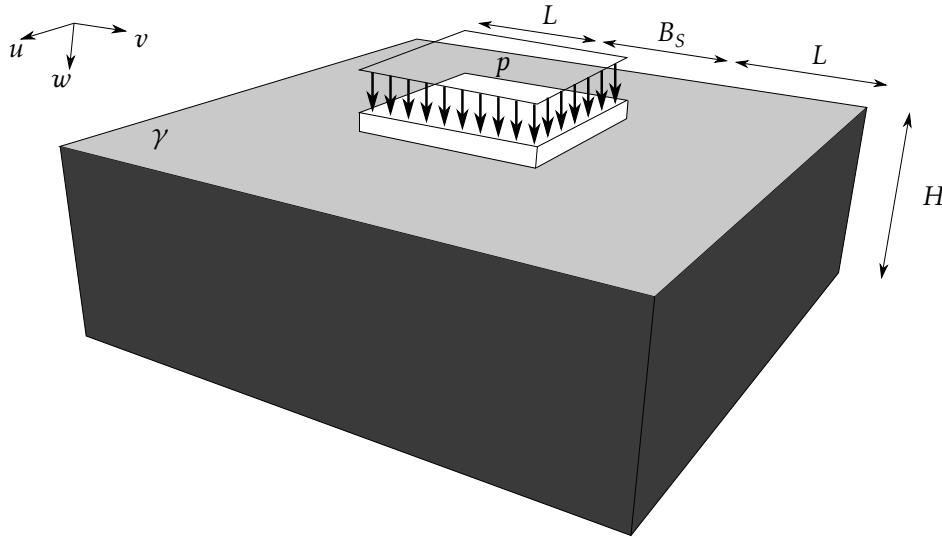





Figura 6.29: Geometria inicial do problema de fundações superficiais quadradas

Explora-se igualmente as condições de simetria do problema, logo, apenas se discretizou 1/4 do domínio, adicionando para isso as propriedades de simetria nas novas fronteiras. Na tabela 6.14 é representada a legenda das diversas condições de fronteira. Para a análise segundo o teorema cinemático (TC) expõem-se as restrições ao vetor das velocidades (u, v, w) de forma a simular as faces livres, simétricas, bloqueadas e rígidas. Para a análise segundo o teorema estático (TE) expõem-se as restrições ao tensor das tensões (onde σ_n define o tensor das tensões normais e τ o tensor das tensões tangenciais) de forma a simular as faces livres, simétricas, rígidas e de extensão.

Neste problema são analisados dois casos distintos. No primeiro caso, supõe-se um solo sem peso próprio, $\gamma = 0$, e puramente coesivo definido pelo critério de Tresca (com resistência ao corte não drenada c_u) para simular a rotura em condições não drenadas.

Tabela 6.14: Fundações superficiais quadradas: condições de fronteira

Fronteiras (faces)	Restrições TC	Restrições TE
Sapata	$u = v = 0$	$(\sigma_n^{Topo} = p \text{ ou } \sigma_n^{Lateral} = 0) \& \tau = 0$
	-	$\sigma_n = \tau = 0$
	$u^{Esq} = 0 \text{ ou } v^{Dir} = 0$	$\tau = 0$
	$u = v = w = 0$	Extensão
Invisíveis	$u = v = w = 0$	Extensão

No segundo, estuda-se a rotura em condições drenadas, num solo com peso próprio e puramente atrítico definido pelo critério de Mohr-Coulomb com um ângulo de resistência ao corte, $\phi' = 30^\circ$.

Segundo Terzaghi [145], a capacidade de carga de uma fundação superficial, p_u , é definida pelos bem conhecidos fatores adimensionais da capacidade resistente de fundações, N_c e N_γ .

Para o caso de uma sapata à superfície, de comprimento infinito, com um carregamento vertical centrado, analisada em deformação plana considerando condições não drenadas, a capacidade resistente é obtida através das expressões (6.5) e (6.6). De forma a calcular a capacidade resistente de uma sapata quadrada, é necessário aplicar uma correção à equação (6.5), obtendo-se,

$$p_u = c_u N_c s_c \quad (6.19)$$

Onde s_c , corresponde ao fator de correção relativo à forma da sapata.

Para o caso de uma sapata à superfície, de comprimento infinito, com um carregamento vertical centrado, analisada em deformação plana considerando condições drenadas, a capacidade resistente é obtida através da expressão (6.7). De forma a calcular a capacidade resistente de uma sapata quadrada, é necessário aplicar uma correção à equação (6.7), obtendo-se,

$$p_u = \frac{1}{2} \gamma B_s N_\gamma s_\gamma \quad (6.20)$$

Onde s_γ , corresponde ao fator de correção relativo à forma da sapata.

6.3.3.1 Fundações superficiais quadradas: condições não drenadas

No caso não drenado, considerou-se que as malhas utilizadas para analisar este problema seriam malhas estruturadas, baseados numa grelha regular de dimensões $B_S/2n_{B_S}$, sendo n_{B_S} , o número de divisões em metade da dimensão do lado da sapata, $B_S/2$. De seguida cada hexaedro é dividido em vinte e quatro tetraedros, onde cada tetraedro deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado no centroide de uma das faces, e por último um nó central correspondente ao baricentro do hexaedro, como ilustrado na figura 4.3.

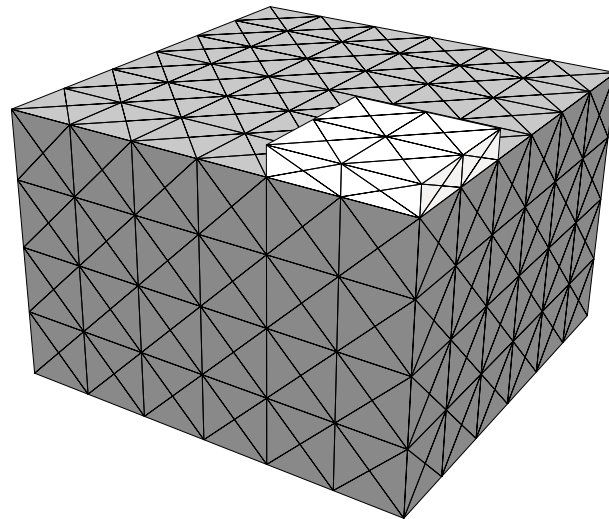
Na figura 6.30(a), mostra-se um exemplo deste tipo de malha de elementos finitos utilizada para o caso de $n_{B_S} = 2$. No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC) considerou-se que seriam modelados por tetraedros de dez nós, permitindo aproximações quadráticas ao campo das velocidades (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por tetraedros de quatro nós permitindo aproximações lineares ao campo das tensões (tabela 4.3). No caso do teorema estático, como se trata de um problema semi-infinito, realizaram-se os cálculos, numa primeira fase sem extensão, sendo posteriormente validados através dos cálculos realizados através do método de extensão implementado, representado esquematicamente pela figura 6.30(b).

Na tabela 6.15, representam-se as propriedades da malhas utilizadas, isto é, para cada malha definem-se o número de elementos da malha original (n_E) e o número de graus de liberdade (NDOF) referente ao teorema cinemático (TC) e referente ao teorema estático sem e com extensão (TE e TE_{extn}).

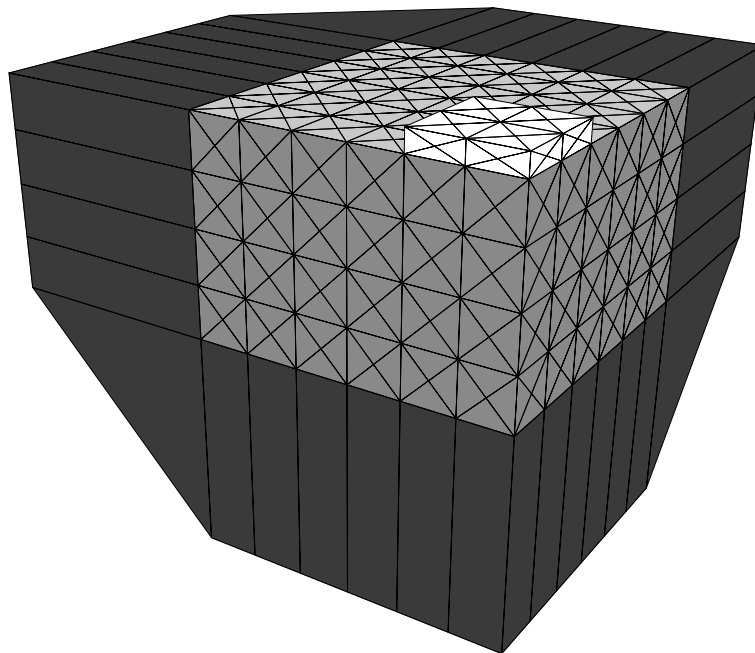
Tabela 6.15: Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: propriedades da malha e evolução da carga de colapso como uma função do grau do refinamento

Malha	n_E	NDOF ^{TE} (NDOF ^{TE_{extn}})	NDOF ^{TC}	$(N_{cs_c})^{TE}$	$(N_{cs_c})^{TC}$
$n_{B_S} = 2$	3552	74113 (88937)	14779	5.397	7.282
$n_{B_S} = 3$	11880	248329 (281137)	49725	5.510	6.744
$n_{B_S} = 4$	28032	586561 (644409)	117731	5.567	6.483
$n_{B_S} = 5$	54600	1143241 (1233185)	229813	5.602	6.330
$n_{B_S} = 6$	94176	1972801 (2101897)	396987	5.625	6.229
$n_{B_S} = 8$	222720	4668289 (4896857)	940675	5.653	6.103
$n_{B_S} = 10$	434400	9108481 (9464745)	1836923	5.669	6.029
$n_{B_S} = 12$	749952	15728833 (16241017)	3173859	5.680	5.979
$n_{B_S} = 14$	1190112	-	5039611	-	5.944

Neste exemplo pretende-se mostrar a evolução da solução com o aumento do refinamento, sendo os resultados obtidos apresentados igualmente na tabela 6.15. Da análise desta tabela, conclui-se, por um lado, que os resultados obtidos são muito satisfatórios, onde no caso mais refinado, o intervalo da solução apenas apresenta um erro relativo que no máximo apresenta o valor de 4.65%, que corresponde a um erro desprezável do ponto de vista da engenharia. O erro referido anteriormente é obtido através da seguinte



(a) Malha estruturada de elementos finitos $n_{B_S} = 2$ (TC e TE sem extensão)



(b) Malha estruturada de elementos finitos $n_{B_S} = 2$ (TE com extensão)

Figura 6.30: Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas

expressão:

$$ERRO_{max} = \frac{|(N_{cs_c})^{TE} - (N_{cs_c})^{TC}|}{\min((N_{cs_c})^{TE}, (N_{cs_c})^{TC})} \times 100\% \quad (6.21)$$

Comparando os resultados obtidos com os resultados apresentados por outros autores conclui-se que as estimativas obtidas melhoram os melhores resultados existentes na literatura [133, 50, 30]. Segundo uma análise numérica de AL os autores [133] propuseram um valor de 5.523 para o teorema estático e 6.221 para o teorema cinemático. Segundo uma análise de elementos finitos em tensão-deformação, ABAQUS (HKS 2002), os autores [50] propuseram um valor de 5.91. Por fim, segundo a origem da formulação do presente trabalho para o teorema cinemático da análise limite em [30] propôs-se um valor de 5.96.

Por outro lado, para o mesmo nível de refinamento a formulação baseada no teorema estático aparenta apresentar uma maior proximidade à carga de colapso exata do que a formulação baseada no teorema cinemático, dado que com o aumento do refinamento da malha a variação da solução entre duas malhas consecutivas obtida para o caso do teorema cinemático é superior em relação à variação obtida para o caso do teorema estático. De facto, esta diferença tende a diminuir com o aumento do refinamento, onde no caso da malha $n_{BS} = 12$, a estimativa TE apresenta uma variação de 0.011 e a estimativa TC apresenta uma variação de 0.050.

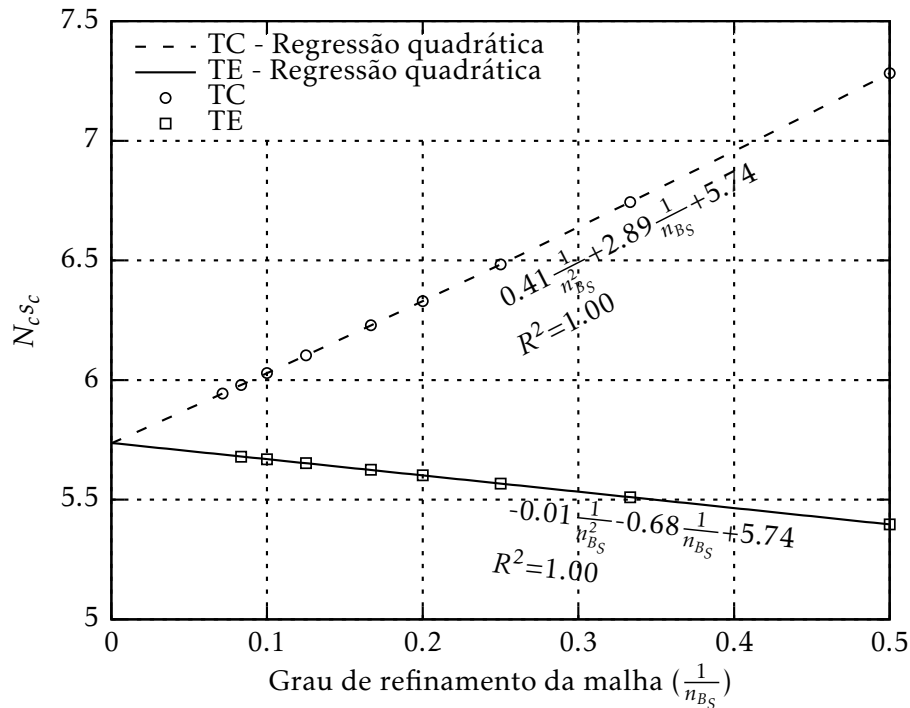


Figura 6.31: Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: regressão quadrática dos resultados

Na figura 6.31, representam-se os resultados obtidos tanto pelo teorema estático como pelo teorema cinemático em função do grau de refinamento da malha. A cada um destes

conjuntos é também ajustado uma regressão quadrática. As regressões obtidas apresentam uma forte correlação com os dados ($R^2 \simeq 1$), relevando que o erro é uma função do grau de refinamento da malha. Este facto, permite extrapolar com grande precisão o coeficiente N_{csc} , bastando para isso, obter o limite da expressão da regressão linear quando o grau de refinamento da malha tende para zero ($\frac{1}{n_{Bs}} \rightarrow 0$), resultando para ambos os teoremas no valor de 5.74 .

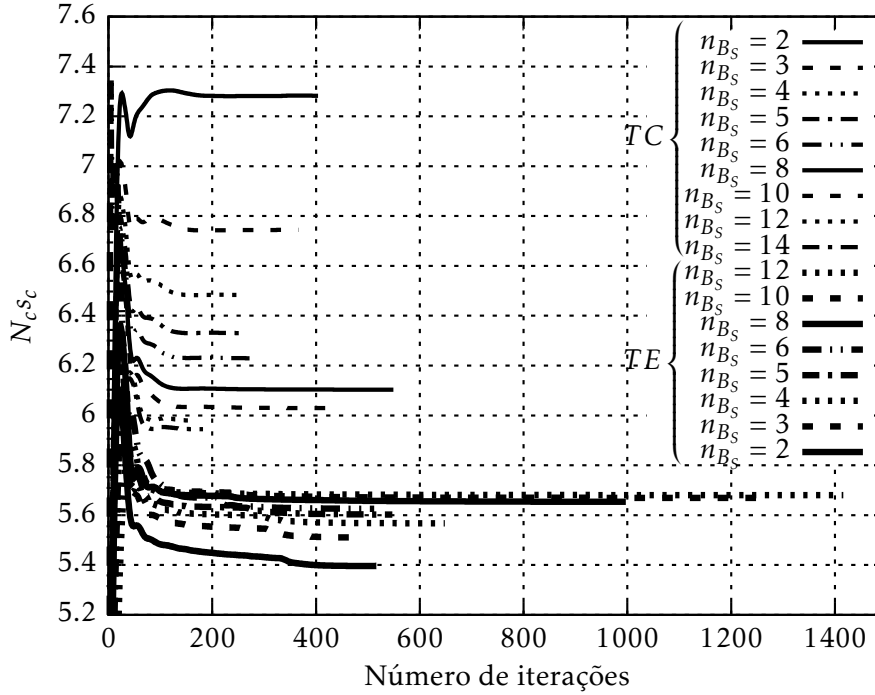


Figura 6.32: Taxa de convergência de N_{csc} para os diversos casos de n_{Bs} analisados

Para as malhas utilizadas no presente problema (tabela 6.15) é representado na figura 6.32 a evolução da estimativa de N_{csc} , com o decorrer do processo iterativo do algoritmo MDAM. Constata-se que uma estimativa aceitável da solução final é obtida para um número reduzido de iterações. De facto, na grande maioria dos cálculos realizados em menos de 1000 iterações o algoritmo MDAM obtém uma solução com uma precisão de $n_{dig} = 4$, onde n_{dig} corresponde ao número de dígitos significativos. Por outro lado, para obter estimativas de elevada precisão com 5/6 dígitos significativos o número de iterações necessárias para atingir esta precisão é cerca de 5/8 vezes o número de iterações necessárias para se atingir 4 dígitos significativos, como se demonstra na figura 6.33 para uma sapata com $n_{Bs} = 5$, analisada segundo o teorema estático da análise limite.

Na figura 6.34 representa-se o comportamento na cedência obtido nos cálculos realizados segundo o teorema cinemático e estático da análise limite. Optou-se por reproduzir para malha mais refinada o mecanismo de colapso e a distribuição da dissipação plástica nos elementos.

Da análise da figura 6.34 podem tecer-se os seguintes comentários:

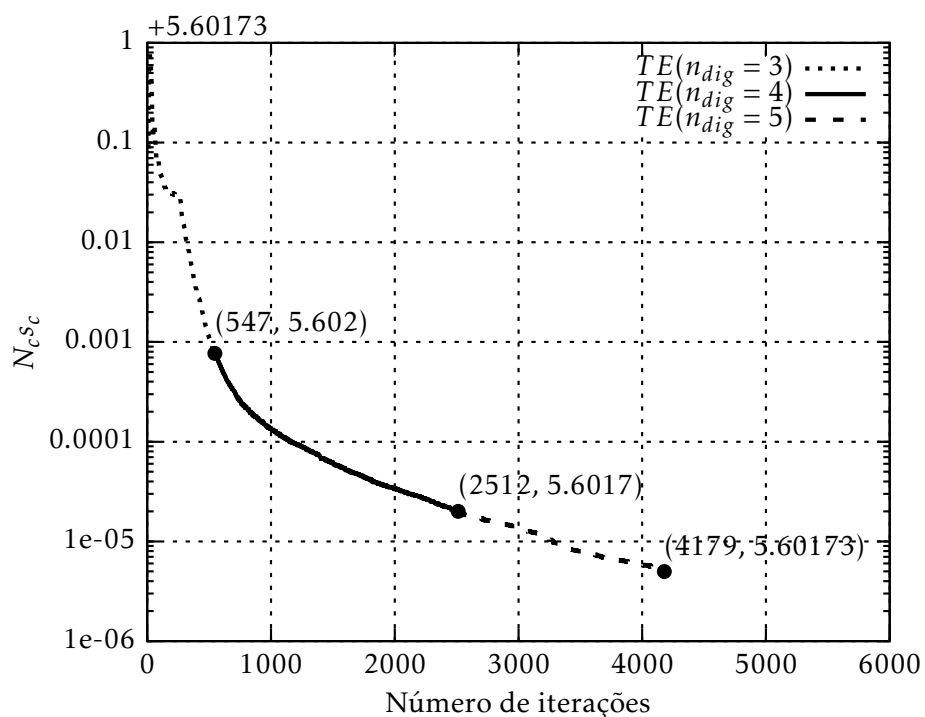


Figura 6.33: Evolução do número de dígitos significativos de N_{cs_c} para o caso $n_{B_s} = 5$ analisado segundo o teorema estático

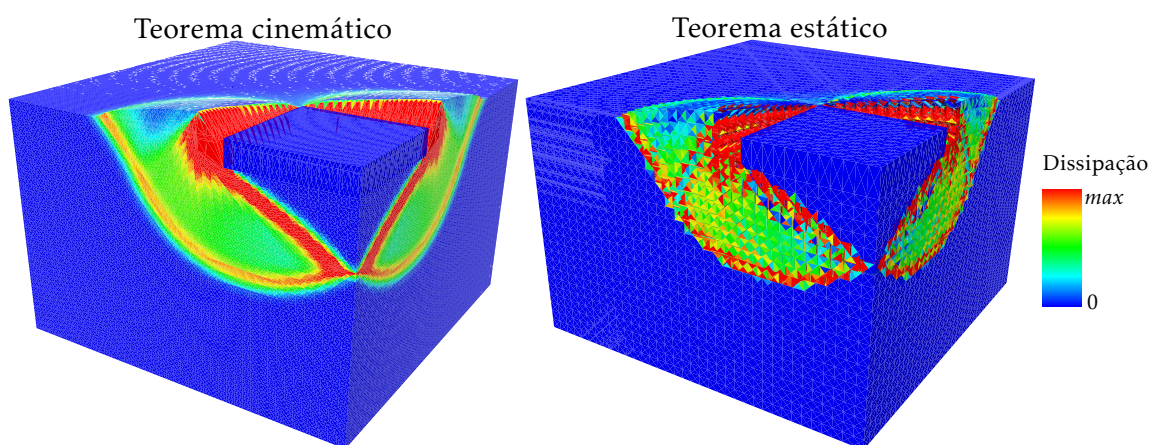


Figura 6.34: Fundações superficiais quadradas em condições não drenadas: mecanismos de colapso e distribuição da dissipação plástica nos elementos para a malha mais refinada

- O mecanismo de colapso é definido por três zonas. A primeira zona, que apresenta a forma de uma cunha por debaixo da aplicação da carga, onde as máximas tensões principais são verticais. A segunda zona, que é caracterizada por se encontrar em corte radial partindo das faces exteriores da fundação carregada. Por fim, a terceira zona corresponde ao bloco passivo. No momento do colapso, a primeira zona desce, induzindo deformação na segunda zona que origina a elevação da terceira zona;
- Existe uma grande semelhança na distribuição da dissipação plástica obtida pelos diferentes teoremas;
- O caso do teorema estático corresponde ao que apresenta superfícies de dissipação plástica mais estreitas;
- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático. Em contraste, como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo, apesar disso ambos apresentam a mesma ordem de grandeza.

6.3.3.2 Fundações superficiais quadradas: condições drenadas

No caso do carregamento drenado, é difícil obter resultados de qualidade e de obter a convergência da solução [81]. De facto, para se obter bons resultados de $N_\gamma s_\gamma$ é necessário proceder ao refinamento das malhas por baixo das arestas da sapata. Assim, para o caso do teorema cinemático procedeu-se ao aumento da densidade de elementos nessa zona, enquanto que para o caso do teorema estático foi necessário a introdução de elementos em leque, como se descreveu na secção 5.3.1. Em ambos os casos, o nível de refinamento da malha é controlado pelo parâmetro $r = \frac{B_S}{h_{max}}$, definido como o rácio entre a dimensão do lado da sapata, B_S , e a máxima largura da aresta de todos os elementos que definem a malha, h_{max} .

De seguida procede-se à divisão dos hexaedros e prismas triangulares em tetraedros. Cada hexaedro é dividido em vinte e quatro tetraedros, onde cada tetraedro deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado no centroide de uma das faces, e por último um nó central correspondente ao baricentro do hexaedro, como ilustrado na figura 4.3. Cada prisma é dividido em catorze tetraedros, onde cada tetraedro é formado por um nó central correspondente ao baricentro do prisma e por três nós posicionados nos vértices da face triangular ou, no caso de se tratar de uma face quadrangular, por dois nós posicionados nos vértices desta face e pelo nó localizado no centroide dessa face, como ilustrado na figura 5.10.

Na figura 6.35(a) e 6.35(b), mostra-se respetivamente um exemplo da malha de elementos finitos utilizada com $r = 0.8$ para o caso do teorema cinemático e para o caso do teorema estático. No caso dos cálculos serem realizados pelo teorema cinemático (TC) considerou-se que seriam modelados por tetraedros de dez nós permitindo aproximações quadráticas ao campo das velocidades (tabela 4.1), e no caso do teorema estático (TE) por tetraedros de quatro nós permitindo aproximações lineares ao campo das tensões

Tabela 6.16: Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: propriedades da malha e evolução da carga de colapso como uma função do grau do refinamento

Malha	n_E^{TE}	n_E^{TC}	NDOF ^{TE} (NDOF ^{TE_{extn}})	NDOF ^{TC}	$(N_{\gamma s_{\gamma}})^{TE}$	$(N_{\gamma s_{\gamma}})^{TC}$
$r = 0.8$	7272	2976	153766 (161542)	13071	10.59	29.27
$r = 1.2$	17088	9504	360517 (375653)	41265	12.11	21.71
$r = 1.6$	32752	21888	690196 (715044)	94507	12.91	19.07
$r = 2.0$	55560	42000	1170019 (1206931)	180753	13.31	17.81
$r = 2.4$	86808	71712	1827202 (1878530)	307959	13.50	17.09
$r = 2.8$	127792	112896	2688961 (2757057)	484081	13.64	16.58
$r = 3.2$	179808	167424	3782512 (3869728)	717075	13.71	16.21
$r = 3.6$	244152	237168	5135071 (5243759)	1014897	13.75	15.93
$r = 4.0$	322120	324000	6773854 (6906366)	1385503	13.78	15.68
$r = 4.4$	415008	429792	8726077 (8884765)	1836849	13.81	15.55

(tabela 4.3). No caso do teorema estático, como se trata de um problema semi-infinito, realizaram-se os cálculos numa primeira fase sem extensão, sendo posteriormente validados através dos cálculos realizados com o auxílio do método de extensão implementado, representado esquematicamente pela figura 6.35(c).

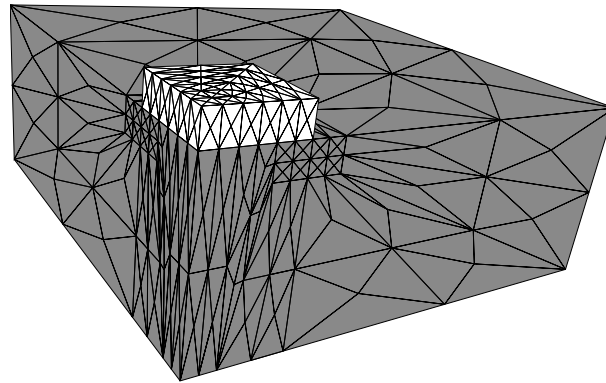
Na tabela 6.16 representam-se as propriedades da malhas utilizadas, isto é, para cada malha definem-se o número de elementos da malha original e o número de graus de liberdade referente ao teorema cinemático (TC) e referente ao teorema estático sem e com extensão (TE e TE_{extn}).

Neste exemplo pretende-se mostrar a evolução da solução com o aumento do refinamento, sendo os resultados obtidos apresentados igualmente na tabela 6.15. Da análise desta tabela, conclui-se, por um lado, que os resultados obtidos são muito satisfatórios, onde no caso mais refinado, $r = 4.4$, o intervalo da solução apresenta um erro de 12.60%, que corresponde a um erro aceitável do ponto de vista da engenharia. O erro referido anteriormente é obtido através da seguinte expressão:

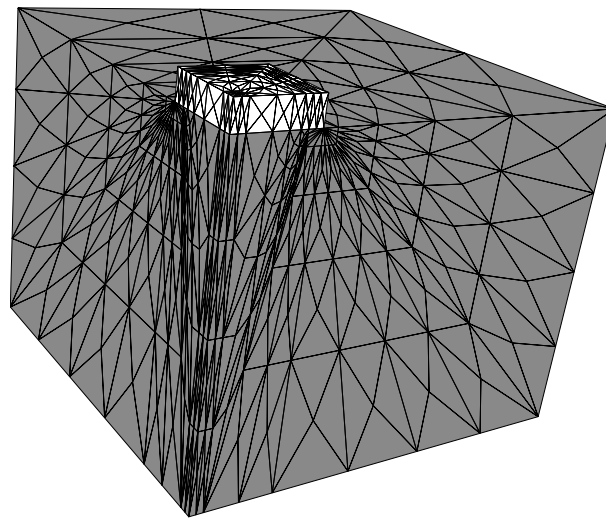
$$ERRO_{max} = \frac{\left| (N_{\gamma s_{\gamma}})^{TE} - (N_{\gamma s_{\gamma}})^{TC} \right|}{\min \left((N_{\gamma s_{\gamma}})^{TE}, (N_{\gamma s_{\gamma}})^{TC} \right)} \times 100\% \quad (6.22)$$

Sendo superior em relação ao erro obtido no cálculo da capacidade resistente de uma sapata quadrada em condições não drenadas, ver secção 6.3.3.1, justificado em parte pelo menor número de graus de liberdade utilizados.

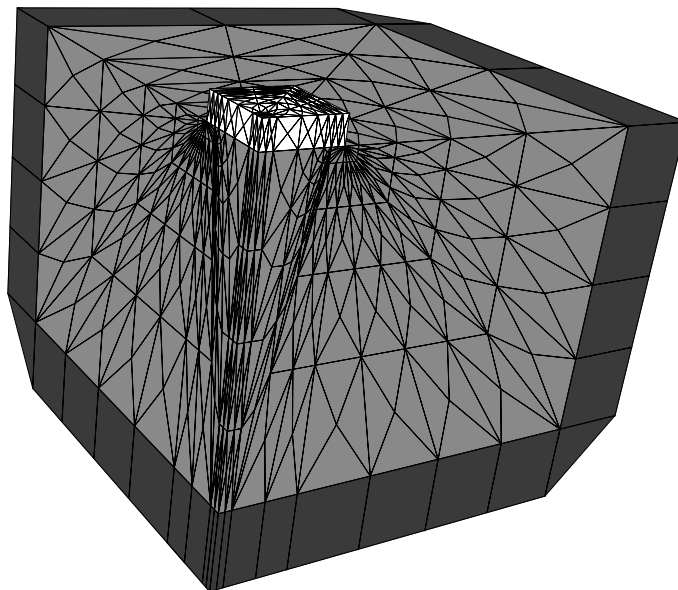
Comparando os resultados obtidos com os resultados apresentados por outros autores conclui-se que as estimativas obtidas melhoram os melhores resultados existentes na literatura [81, 10]. Segundo uma análise numérica de AL os autores [81] propuseram um valor de 12.67 para o teorema estático e 21.82 para o teorema cinemático. Posteriormente, com uma formulação semelhante à do presente trabalho para o teorema cinemático da análise limite os autores [10] propuseram um valor de 16.6006.



(a) Malha estruturada de elementos finitos $r = 0.8$ (TC)



(b) Malha estruturada de elementos finitos $r = 0.8$ (TE sem extensão)



(c) Malha estruturada de elementos finitos $r = 0.8$ (TE com extensão)

Figura 6.35: Fundações superficiais quadradas em condições drenadas

Por outro lado, para o mesmo nível de refinamento a formulação baseada no teorema estático aparenta apresentar uma maior proximidade à carga de colapso exata do que a formulação baseada no teorema cinemático, dado que com o aumento de refinamento da malha a variação da solução entre duas malhas consecutivas obtida para o caso do teorema cinemático é superior em relação à variação obtida para o caso do teorema estático. De facto, esta diferença tende a diminuir com o aumento do refinamento, onde no caso da malha $r = 4.4$, a estimativa TE apresenta uma variação de 0.03 e a estimativa TC apresenta uma variação de 0.13.

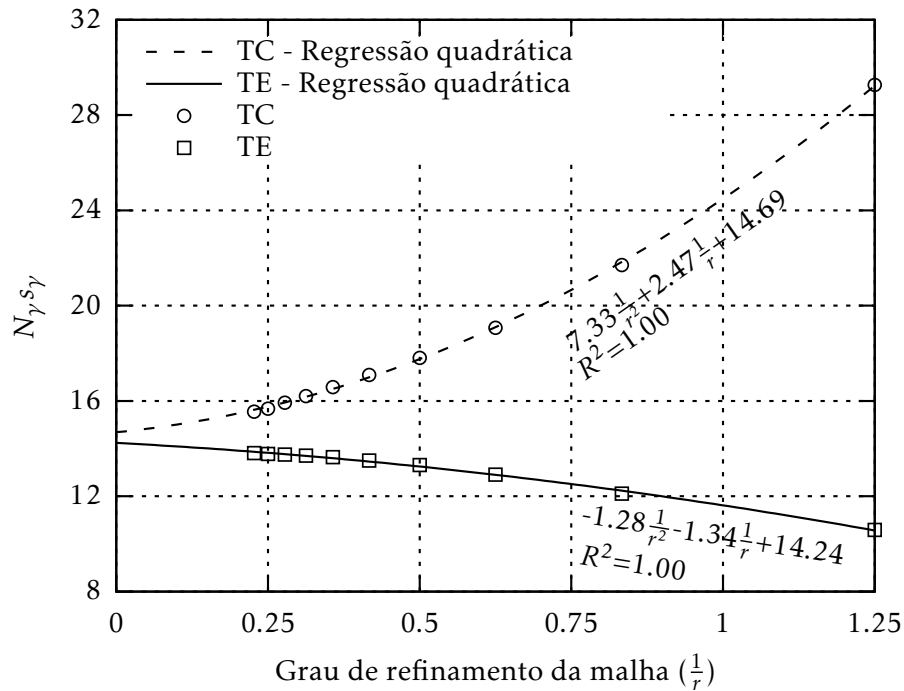


Figura 6.36: Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: regressão quadrática dos resultados

Na figura 6.36, representam-se os resultados obtidos tanto pelo teorema estático como pelo teorema cinemático ajustando a cada um destes conjuntos uma regressão quadrática. As regressões obtidas apresentam uma forte correlação com os dados ($R^2 \simeq 1$), relevando que o erro é uma função do grau de refinamento da malha. Este facto, permite extrapolar com grande precisão o coeficiente $N_\gamma s_\gamma$, bastando para isso, obter o limite da expressão da regressão linear quando o grau de refinamento da malha tende para zero ($\frac{1}{r} \rightarrow 0$), resultando para o caso do teorema estático no valor de 14.24 e para o caso do teorema cinemático no valor de 14.69. A diferença entre os dois valores é muito reduzida, apresentando um erro de 3.16% que corresponde a um erro desprezável do ponto de vista da engenharia.

Na figura 6.37, representa-se o comportamento na cedência observado das malhas obtidas para os cálculos realizados segundo o teorema cinemático e estático da análise limite. Assim optou-se por reproduzir para malha mais refinada ($r = 4.4$), o mecanismo

de colapso e a distribuição da deformação plástica nos elementos.

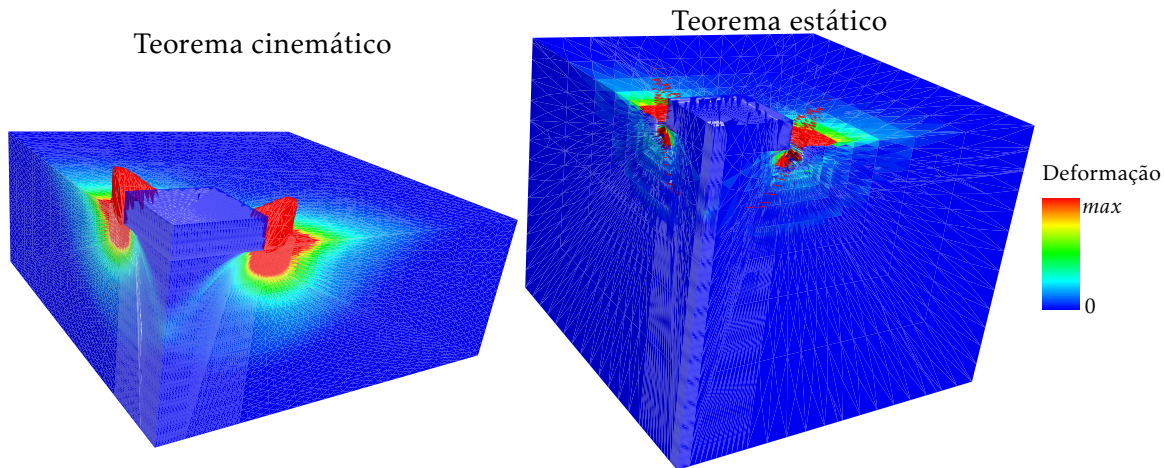


Figura 6.37: Fundações superficiais quadradas em condições drenadas: mecanismos de colapso e distribuição da deformação plástica nos elementos para a malha $r = 4.4$

Da análise da figura 6.37 podem tecer-se os seguintes comentários:

- O mecanismo de colapso é igualmente definido por três zonas. A primeira zona, que apresenta a forma de uma cunha por debaixo da aplicação da carga, onde as máximas tensões principais são verticais. A segunda zona, que é caracterizada por se encontrar em corte radial partindo das faces exteriores da fundação carregada. Por fim, a terceira zona corresponde ao bloco passivo. No momento do colapso, a primeira zona desce, induzindo deformação na segunda zona que origina a elevação da terceira zona;
- Existe uma boa semelhança entre a distribuição da deformação plástica obtida pelos diferentes teoremas;
- O caso do teorema estático corresponde ao que apresenta superfícies de deformação plástica mais estreitas;
- O campo das velocidades é contínuo no caso do teorema cinemático. Em contraste, como seria de esperar, no caso do teorema estático o campo das velocidades é descontínuo, apesar disso ambos apresentam a mesma ordem de grandeza.

Capítulo 7

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 Conclusões

A obtenção de uma ferramenta numérica de elementos finitos baseada nos teoremas cinemático e estático da análise limite, que permita a determinação rigorosa de estimativas exteriores e interiores do conjunto das cargas de colapso de sistemas mecânicos, consistiu no principal objetivo deste trabalho.

Para se atingir este objetivo foi necessário concretizar várias etapas. De seguida, recapitula-se de uma forma sumária as principais etapas e os conceitos retidos mais importantes.

Assim, é formulado um problema de otimização que maximiza a carga aplicada. Este problema é sujeito a restrições que garantem a admissibilidade estática das soluções obtidas, isto é, que tanto verifiquem o equilíbrio no domínio e na fronteira estática, como não violem a função de cedência. Recorrendo ao Teorema estático, é obtido assim um carregamento que seja inferior ou igual à carga de colapso da estrutura.

O problema, de seguida, é discretizado através de elementos finitos isoparamétricos, utilizando funções de forma nodais lineares para interpolar o campo das tensões por duas vezes, de uma forma redundante, isto é, de uma forma global e local. Adicionalmente, foi necessário explorar uma forma de introduzir elementos especiais que permitam estender o campo das tensões para um domínio (semi-)infinito, dado que apenas se consegue discretizar parcialmente o domínio do corpo. Sendo, só assim possível, verificar todas as restrições impostas ao problema. Estes elementos de extensão, são basicamente elementos finitos isoparamétricos com a peculiaridade de apresentarem condições de extensão, que permitam assim obter limites estritamente inferiores à carga de colapso de problemas não limitados totalmente por fronteiras finitas.

Através dos princípios da dualidade, explorou-se a relação entre a formulação proposta do teorema estático da análise limite e a formulação do teorema cinemático da análise limite previamente proposta por [151]. O que permitiu definir duas formulações

de elementos finitos complementares para os teoremas da Análise Limite, uma baseada no campo das deformações e outra baseada no campo das tensões. Ambas as formulações são equivalentes, o que permite afirmar que não existe nenhuma vantagem significativa em preferir uma em relação à outra. Contudo, para materiais menos comuns é preferível a formulação segundo o campo das tensões dado que apenas é necessário o conhecimento da função de cedência para a etapa de minimização local (esquema de projeção). Porque, apesar do custo computacional ser semelhante (mesmo tipo de operações), no caso da projeção ser realizada no campo das deformações seria necessário obter a definição do espaço auxiliar, C_c , como se trata de um material menos comum é pouco provável que a sua derivação já exista na bibliografia o que provoca que esse trabalho desafiante de desenvolvimento tenha que ser feito por nós.

Independentemente do campo escolhido, a sua compatibilidade é imposta recorrendo ao método do Lagrangeano Aumentado, através da introdução da respetiva condição de compatibilidade na função objetivo de uma forma linear e quadrática, sendo neste último caso afetado por um termo quadrático de penalidade.

A resolução do problema de otimização não linear é realizado através do algoritmo MDAM, Método de Direção Alternada de Multiplicadores, que consiste basicamente na realização de três processos em cada iteração. Nos dois primeiros processos, são realizadas de forma sucessiva e independente a minimização das duas variáveis primais (global e local), seguido do processo de atualização das variáveis duais. A minimização global corresponde à resolução de um sistema linear de equações, como foi possível que este seja independente do parâmetro de penalidade, ρ , apenas foi necessário fatorizar a matriz do sistema governativo uma única vez, logo em cada iteração apenas se procede à reutilização da fatorização seguido da substituição descendente e ascendente. Em contraste com a formulação do teorema cinemático, a formulação do teorema estático pode apresentar problemas na estrutura do sistema governativo, nomeadamente efeitos de *locking* devido à distribuição descontínua do campo das tensões aplicadas e restrições linearmente dependentes. Contudo, estes problemas podem ser respetivamente ultrapassados através de um re-arranjo especial dos elementos finitos ou através da deteção e eliminação das redundâncias (durante o processo de montagem da matriz global ou através de um método direto que permita lidar com matrizes com *pivots* nulos). Por outro lado, na minimização local é necessário resolver vários problemas, pequenos e independentes, para o Teorema Cinemático ou para o Teorema Estático. A resolução destes problemas devido às suas propriedades é simples, por isso e como se pretende obter a melhor eficiência numérica possível definiram-se para cada material e para Teorema a solução analítica para cada caso.

Com o algoritmo implementado pretendeu-se melhorar a eficiência numérica e a velocidade de convergência do algoritmo, por isso, definiu-se um procedimento para atualizar no decorrer do processo iterativo do algoritmo MDAM, o parâmetro de penalidade, ρ e uma estratégia de paragem do algoritmo. Estas extensões à formulação clássica dependem dos resíduos primais e duais que surgem como, é previsível, da condição de viabilidade

primal e dual provenientes da aplicação das condições KKT.

Por fim, procedeu-se à paralelização do modelo. O algoritmo paralelo baseia-se no modelo de comunicação *Master/Slaves*, sendo o processo *Master* que detém o controlo sobre os restantes processos *Slaves*. A minimização global corresponde ao processo crítico, dado que a sua implementação em paralelo é a que condiciona o desempenho global do modelo, pois os processos de minimização local e de atualização dos multiplicadores de Lagrange apresentam uma escalabilidade algorítmica ideal, considerando que cada processo pode ser executado independente em cada elemento.

Através da capacidade de paralelização é possível a resolução de problemas mais refinados (maior número de graus de liberdade) principalmente no caso tridimensional, o que permitiu melhorar invariavelmente os melhores valores encontrados, até à data, na literatura.

Os testes numéricos apresentados no capítulo 6, ilustram a enorme capacidade de cálculo do modelo desenvolvido bem como a sua extensa versatilidade. O que permitiu reduzir ao máximo o intervalo entre o limite superior e inferior originando que se possa estimar com grande precisão a solução exata. A representação gráfica do comportamento de cedência para ambos os teoremas demonstra quase sempre uma enorme semelhança entre as zona de plasticidade.

Estas conclusões confirmam a eficácia da estratégia paralela da análise limite proposta, bem como tornam-na numa estratégia competitiva em relação a outras formulações da análise limite existentes na literatura. Encorajando a sua utilização na análise de outros problemas geotécnicos para além dos apresentados neste documento.

Por fim, gostaria de realçar que parte dos feitos alcançados com este trabalho de doutoramento já foram divulgadas em diversos congressos internacionais [32, 34, 33] e encontram-se dois artigos de revista científica internacional em desenvolvimento (um já se encontra em fase final de revisão). Adicionalmente o trabalho desenvolvido por este trabalho de doutoramento já serviu de base a quatro teses de mestrado, sendo que três delas já foram entregues [155, 123, 104].

7.2 Desenvolvidos Futuros

Por fim, são enunciados um conjunto de tópicos que se considera importantes explorar em trabalhos futuros.

Apesar dos excelentes resultados obtidos, não se considera esgotado o desenvolvimento do modelo de cálculo apresentado. O aspeto primordial neste tópico continua a ser a melhoria da velocidade de convergência do algoritmo MDAM. Por isso a comunidade científica, tem publicado bastantes trabalhos sobre este tópico surgindo com múltiplas hipóteses de melhorar a capacidade de convergência, quer seja através da escolha do valor ótimo do parâmetro de penalidade, ρ , ou através de diferentes estratégias de variação do parâmetro de penalidade, ou possibilitando a relaxação na atualização das variáveis, ou

através do desenvolvimento de extensões à formulação clássica denominadas como “Fast”, entre muitas outras.

Igualmente pretende-se melhorar a escalabilidade do problema na sua vertente de paralelização. O ponto crítico desta etapa reside, como se mencionou, na minimização global, dado que os restantes processos apresentam uma escalabilidade ótima. Para melhorar esta minimização é necessário descobrir outros métodos de resolução diretos que permitam não só resolver problemas em paralelo como apresentem a possibilidade de deteção e remoção de *pivots* nulos na matriz do sistema governativo. Sendo necessário, por vezes, alterar a forma de armazenamento da matriz do sistema governativo. Sobre este tópico menciona-se que se encontra em fase de implementação/estudo a utilização do método direto WSMP [53].

Para além disso, pretende-se escalar o modelo desenvolvido de forma a que o melhoramento da convergência se obtenha de uma forma robusta independentemente da dimensão do problema analisado.

Na formulação baseada no teorema estático da Análise Limite pretende-se impor a condição de equilíbrio de forma automática assumindo para isso que a distribuição de tensões dentro de cada elemento apresente a forma de uma função polinomial de quarta ordem de Airy. Ainda nesta formulação, pretende-se definir uma nova estratégia para obter um campo de tensões estritamente admissível para o caso de o problema apresentar uma geometria (semi-)infinita. A ideia que está em fase de desenvolvimento, consiste em afetar o campo de tensões finito obtido, de forma a verificar todas as condições de equilíbrio impostas. Para isso, após a obtenção da estimativa obtida para o problema finito é necessário a realização de outro problema de otimização, que reside basicamente num problema definido pelos elementos de extensão sujeitos à carga variável obtida nas fronteira de extensão. A estimativa da carga de colapso corresponde à multiplicação de ambos os multiplicadores de colapso obtidos.

Sendo necessário estudar, implementar e validar exaustivamente todas estas hipóteses demonstrando de que forma permitem melhorar a eficiência do modelo proposto.

Outro assunto, que corresponde ao passo seguinte do desenvolvimento de formulações estritas do teorema estático e cinemático da análise limite, corresponde à definição de uma técnica de adaptabilidade.

Por fim, julga-se ainda relevante implementar o *shakedown* da formulação apresentada.

Em suma, considera-se que este trabalho de doutoramento apresenta um avanço considerável no desenvolvimento de modelos numéricos para a Análise Limite, contudo como se conclui do exposto nesta secção, ainda existe uma vasta gama de trabalho a desenvolver nesta área.

Bibliografia

- [1] A. Abbo e S. Sloan. “A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion”. Em: *Computers & Structures* 54.3 (1995), pp. 427–441.
- [2] E. Absi e J. Kérisel. *Active and Passive Earth Pressure Tables*. Taylor & Francis, 1990.
- [3] R. Acetia, G. Balliob, A. Capsonib e L. Corradic. “A limit analysis study to interpret the ultimate behavior of bolted joints”. Em: *Journal of Constructional Steel Research* 60.9 (2004), 1333–1351.
- [4] P. R. Amestoy, I. S. Duff e J. -Y. L’Excellent. “Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184.2-4 (2000), pp. 501–520.
- [5] E. Anderheggen e H. Knöpfel. “Finite element limit analysis using linear programming”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 8.12 (1972), pp. 1413–1431.
- [6] E. D. Andersen, C. Roos e T. Terlaky. “On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization”. Em: *Mathematical Programming* 95.2 (2003), pp. 249–277.
- [7] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, S. Hammarling, A. McKenney e D. Sorensen. *LAPACK Users’ Guide*. 3°. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1999.
- [8] A. Antão, M. Vicente da Silva, N. Guerra e R. Delgado. “An upper bound-based solution for the shape factors of bearing capacity of footings under drained conditions using a parallelized mixed f.e. formulation with quadratic velocity fields”. Em: *Computers and Geotechnics* 41 (2012), pp. 23–35.
- [9] A. N. Antão. “Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée”. Tese de doutoramento. Paris: L’École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [10] A. Antão, T. Santana, M. Vicente da Silva e N. M. C. Guerra. “Passive earth-pressure coefficients by upper-bound numerical limit analysis”. Em: *Canadian Geotechnical Journal* 48.5 (2011), pp. 767–780.

- [11] A. N. Antão, T. G. Santana, M. Vicente da Silva e N. M. C. Guerra. “Three-dimensional active earth pressure coefficients by upper bound numerical limit analysis”. Em: *Computers and Geotechnics* 79 (2016), 96–104.
- [12] M. ApS. *The MOSEK optimization tools version 3.2 (Revision 8)*. User’s Manual e Reference.
- [13] J. F. Ayres. *Schaum’s outline of theory and problems of matrices*. Schaum’s outline series. McGraw-Hill, 1962.
- [14] T. Belytschko e P. G. Hodge. “Plane stress limit analysis by finite elements”. Em: *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE* 96.6 (1970), pp. 931–944.
- [15] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Segunda. Athena Scientific, 1995.
- [16] A. W. Bishop. “The Strength of Soils as Engineering Materials”. Em: *Géotechnique* 16.2 (1966), pp. 91–130.
- [17] L. S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, I. Duff, S. Hammarling, G. Henry, M. Heroux, L. Kaufman, A. Lumsdaine, A. Petitet, R. Pozo, K. Remington e R. C. Whaley. “An Updated Set of Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS)”. Em: *ACM Transactions on Mathematical Software* 28.2 (2002), pp. 135–151.
- [18] L. Borges, N. Zouain, C. Costa e R. Feijóo. “An adaptive approach to limit analysis”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 38.10-13 (2001), pp. 1707–1720.
- [19] A. Bottero, R. Negre, J. Pastor e S. Turgeman. “Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 22.1 (1980), pp. 131–149.
- [20] S. Boyd e L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Ed. por C. U. Press. Cambridge University Press, 2004.
- [21] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato e J. Eckstein. “Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers”. Em: *Foundations and Trends in Machine Learning* 3.1 (2010), pp. 1–122.
- [22] W.-F. Chen. *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Vol. 7. Elsevier Scientific Publishing Co., 1975.
- [23] E. Christiansen e O. S. Pedersen. “Automatic mesh refinement in limit analysis”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.6 (2001), pp. 1331–1346.
- [24] H. Ciria, J. Peraire e J. Bonet. “Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75.8 (2008), pp. 899–944.
- [25] H. S. Ciria. “Computation of Upper and Lower Bounds in Limit Analysis using Second-order Cone Programming and Mesh Adaptivity”. Tese de doutoramento. U. S. A.: Massachusetts Institute of Technology, 2004.

-
- [26] C. A. Coulomb. “Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l’architecture”. Em: *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l’académie des sciences par divers savans* 7 (1773), pp. 343–382.
- [27] E. H. Davis. “Theories of plasticity and failure of soil masses”. Em: *Soil mechanics: selected topics*. Ed. por Elsevier. New York, USA, 1968.
- [28] R. O. Davis e A. P. S. Selvadurai. *Plasticity and Geomechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [29] E. A. de Souza Neto, D. R. J. Owen e D. Perić. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [30] R. Delgado. “Aplicação do teorema cinemático da análise limite ao cálculo da capacidade resistente de fundações superficiais. Influência de aspectos tridimensionais”. Tese de mestrado. Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [31] N. Deusdado. “Cargas de Colapso de sistemas de alvenaria”. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2011.
- [32] N. Deusdado, A. N. Antão, M. Vicente da Silva e N. C. Guerra. “Determinação de impulsos de terras através de implementação numérica dos teorema estático e cinemático”. Em: *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*. APMTAC e SEMNI. 2015.
- [33] N. Deusdado, A. N. Antão, M. Vicente da Silva e N. C. Guerra. “Application of the Upper and Lower-Bound Theorems to Three-Dimensional Stability of Soil Slopes”. Em: *Advances in Transportation Geotechnics 3 . The 3rd International Conference on Transportation Geotechnics (ICTG 2016)*. Vol. 143. SPG. 2016, pp. 674–681.
- [34] N. M. Deusdado, M. Vicente da Silva e A. N. Antão. “Parallel 3D limit analysis via the alternating direction method of multipliers”. Em: *XIII International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*. ECCOMAS e IACM. 2015, pp. 1077–1086.
- [35] A. Drescher e E. Detournay. “Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials”. Em: *Géotechnique* 43.3 (1993), pp. 443–456.
- [36] D. C. Drucker e W. Prager. “Soil mechanics and plastic analysis or limit design”. Em: *Quarterly of Applied Mathematics* 10.2 (1952), pp. 157–165.
- [37] D. C. Drucker, H. J. Greenberg e W. Prager. “The safety factor of an elastic plastic body in plane strain”. Em: *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics* 73 (1951), pp. 371–378.
- [38] D. C. Drucker. “A More Fundamental Approach to Plastic Stress-strain Relations”. Em: *Proceedings of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics*. 1951, pp. 487–491.

- [39] H. P. Dunne e C. M. Martin. “Capacity of rectangular mudmat foundations on clay under combined loading”. Em: *Géotechnique* 67.2 (2017), pp. 168–180.
- [40] J. Eckstein. *The Lions-Mercier Splitting Algorithm and the Alternating Direction Method are Instances of the Proximal Point Algorithm*. Rel. téc. LDIS-P-1769. MIT, 1988.
- [41] J. Eckstein e D. P. Bertsekas. *An alternating direction method for linear programming*. Rel. téc. LDIS-P-1967. MIT, 1990.
- [42] J. Eckstein e D. P. Bertsekas. “On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators”. Em: *Mathematical Programming* 55.1-3 (1992), pp. 293–318.
- [43] A. Fortunato, F. Fabbrocino, M. Angelillo e F. Fraternali. “Limit analysis of masonry structures with free discontinuities”. Em: *Meccanica* 2 (2017), 1–10.
- [44] A. Friaâ. “La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité”. Tese de doutoramento. Paris: Université Pierre et Marie Curie, 1979.
- [45] D. Gabay e B. Mercier. “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation”. Em: *Computers & Mathematics with Applications* 2.2 (1976), pp. 17–40.
- [46] D. Gale. *The Theory of Linear Economic Models*. Ed. por McGraw-Hill. New York, 1960.
- [47] C. Geuzaine e J.-F. Remacle. “Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (2009), 1309–1331.
- [48] R. Glowinski e P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1989.
- [49] R. Glowinski e A. Marroco. “Sur l’approximation, par éléments finis d’ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d’une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires”. Em: *Revue Française d’Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle* 9.R2 (1975), pp. 41–76.
- [50] S. Gourvenec, M. Randolph e O. Kingsnorth. “Undrained Bearing Capacity of Square and Rectangular Footings”. Em: *International Journal of Geomechanics* 6.3 (2006), pp. 147–157.
- [51] I. Griva, S. G. Nash e A. Sofer. *Linear and Nonlinear Optimization*. Second. SIAM, 2009.
- [52] T. Guennouni e P. L. Tallec. “Calcul à la rupture: régularisation de Norton-Hoff et Lagrangien Augmenté”. Em: *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 2.2 (1982), pp. 75–99.

-
- [53] A. Gupta. “Recent Advances in Direct Methods for Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations”. Em: *ACM Transactions on Mathematical Software* 28.3 (2002), pp. 301–324.
- [54] A. A. Gvozdev. “Determination of the value of failure load for statically indeterminate systems subject to plastic deformations”. Em: *Proceedings of the conference on Plastic Deformations*. Ed. por B. G. Galerkin. Moscow e Leningrad. Akademia Nauk SSSR, 1938, pp. 19–38.
- [55] B. S. He, H. Yang e S. L. Wang. “Alternating Direction Method with Self-Adaptive Penalty Parameters for Monotone Variational Inequalities”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 106.2 (2000), pp. 337–356.
- [56] J. Heyman. *Coulomb’s Memoir on Statics*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1972.
- [57] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. London: Oxford University Press, 1950.
- [58] M. Hjiaj, A. V. Lyamin e S. W. Sloan. “Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ ”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 42.5-6 (2005), 1681–1704.
- [59] P. G. Hodge e T. Belytschko. “Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 35.4 (1968), pp. 796–802.
- [60] H. Huh e W. H. Yang. “A general algorithm for limit solutions of plane stress problems”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 28.6 (1991), pp. 727–738.
- [61] G. L. Jiang. “Application de l’analyse limite à l’étude de stabilité des massifs de sol”. Tese de doutoramento. Paris: L’École Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.
- [62] O. Kardani, A. Lyamin e K. Krabbenhøft. “Application of a GPU-accelerated hybrid preconditioned conjugate gradient approach for large 3D problems in computational geomechanics”. Em: *Computers & Mathematics with Applications* 69.10 (2015), pp. 1114–1131.
- [63] W. Karush. “Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints”. Tese de mestrado. Chicago, Illinois: Department of Mathematics, University of Chicago, 1939.
- [64] G. Karypis e V. Kumar. “A Fast and Highly Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs”. Em: *SIAM Journal on Scientific Computing* 20.1 (1999), pp. 359–392.
- [65] K. Krabbenhøft e A. Lymain. *OptumG2: Theory*. OPTUM COMPUTATIONAL ENGINEERING. 2016.

- [66] K. Krabbenhøft, A. V. Lyamin, M. Hjiaj e S. W. Sloan. “A new discontinuous upper bound limit analysis formulation”. Em: *International Journal For Numerical Methods in Engineering* 63.7 (2005), pp. 1069–1088.
- [67] K. Krabbenhøft, A. Lyamin e S. Sloan. *SONIC: A Conic Programming Code for Plasticity Problems: Version 1.0/LA: SOCP for Limit Analysis*. University of Newcastle - Centre of Full Employment & Equity, 2006.
- [68] K. Krabbenhøft, A. V. Lyamin e S. W. Sloan. “Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 44.5 (2007), pp. 1533–1549.
- [69] K. Krabbenhøft, A. V. Lyamin e S. W. Sloan. “Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming”. Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24.11 (2008), pp. 1107–1119.
- [70] H. W. Kuhn e A. W. Tucker. “Nonlinear Programming”. Em: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, 1951, pp. 481–492.
- [71] K. P. Larsen. “Numerical Limit Analysis of Reinforced Concrete Structures”. Tese de doutoramento. Technical University of Denmark, 2010.
- [72] M. M. Lévy. “Mémoire sur les équations générales des mouvements Intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état”. Em: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 70 (1870), pp. 1323–1325.
- [73] A. J. Li, R. S. Merifield e A. V. Lyamin. “Limit analysis solutions for three dimensional undrained slopes”. Em: *Computers and Geotechnics* 36.8 (2009), pp. 1330–1351.
- [74] K. Lim, A. J. Li, A. Schmid e A. V. Lyamin. “Slope-Stability Assessments Using Finite-Element Limit-Analysis Methods”. Em: *International Journal of Geomechanics* 17.2 (2017).
- [75] G. G. Linceo. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove Scienze Attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali*. Ed. por L. Elzeviro. Leida - Paesi Bassi, 1638.
- [76] V. A. Lubarda. *Elastoplasticity Theory*. CRC Press, 2002.
- [77] J. Lubliner. *The Theory of Plasticity*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.
- [78] A. V. Lyamin. “Three-dimensional lower bound limit analysis using nonlinear programming”. Tese de doutoramento. Australia: University of Newcastle, 1999.
- [79] A. V. Lyamin e S. W. Sloan. “Lower bound limit analysis using non-linear programming”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55.5 (2002), pp. 573–611.

-
- [80] A. V. Lyamin e S. W. Sloan. "Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 26.2 (2002), pp. 181–216.
- [81] A. V. Lyamin, R. Salgado, S. W. Sloan e M. Prezzi. "Two- and three-dimensional bearing capacity of footings in sand". Em: *Géotechnique* 57.8 (2007), pp. 647–662.
- [82] A. V. Lyamin, K. Krabbenhøft e S. W. Sloan. "Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics". Em: ed. por D. Mueller-Hoeppel, S. Loehnert e S. Reese. 2011. Cap. Interface Modelling in Computational Limit Analysis, pp. 321–330.
- [83] A. V. Lyamin, S. W. Sloan, K. Krabbenhøft e M. Hjjaj. "Lower bound limit analysis with adaptive remeshing". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63.14 (2005), pp. 1961–1974.
- [84] A. Lyamin e S. Sloan. "A comparison of linear and nonlinear programming formulations for lower bound limit analysis". Em: *Proceedings of the 6th International Symposium on Numerical Models in Geomechanics*. Ed. por P. . Pande. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [85] J. Lysmer. "Limit analysis of plane problems in soil mechanics". Em: *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division ASCE* 96.SM4 (1970), pp. 1311–1334.
- [86] G. Maier, A. Zavelani-Rossi e D. Benedetti. "A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress". Em: *International Journal For Numerical Methods in Engineering* 4.4 (1972), pp. 455–473.
- [87] A. Makrodimopoulos e C. M. Martin. "Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66.4 (2006), pp. 604–634.
- [88] A. Makrodimopoulos e C. M. Martin. "Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31.6 (2007), pp. 835–865.
- [89] A. Makrodimopoulos e C. M. Martin. "Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields". Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24.11 (2008), pp. 911–927.
- [90] J. Mandel e J. Salençon. "Force portante d'un sol sur une assise rigide (étude théorique)". Em: *Géotechnique* 22.1 (1972), pp. 79–93.
- [91] C. Martin. "Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics". Em: *Proceedings 11th International Conference IACMAG*. Vol. 4. Turin, 2005, pp. 441–450.
- [92] C. M. Martin. "The use of adaptive finite-element limit analysis to reveal slip-line fields". Em: *Géotechnique Letters* 1.2 (2011), pp. 23–29.

- [93] C. M. Martin e D. J. White. "Limit analysis of the undrained bearing capacity of offshore pipelines". Em: *Géotechnique* 62.9 (2012), pp. 847–863.
- [94] C. M. Martin, H. P. Dunne, R. Wallerand e N. Brown. "Frontiers in Offshore Geotechnics III". Em: ed. por V. Meyer. Vol. 1. Oslo, Norway: CRC Press, 2015. Cap. Three-dimensional limit analysis of rectangular mudmat foundations, pp. 789–794.
- [95] M. Matar e J. Salençon. "Capacité portante des semelles filantes". Em: *Revue Française De Geotechnique* 9 (1979), pp. 51–76.
- [96] G. McCormick, W. M. III e A. Fiacco. *Computer program implementing the sequential unconstrained minimizing technique for nonlinear programming*. Rel. téc. RAC-TP-151. Research Analysis Corporation, 1965.
- [97] H. Müller-Breslau. *Erddruck Auf Stützmauern*. Ed. por A. Kröner. 1906.
- [98] R. L. Michalowski. "Limit Analysis and Stability Charts for 3D Slope Failures". Em: *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 136.4 (2010), pp. 583–593.
- [99] R. L. Michalowski e A. Drescher. "Three-dimensional stability of slopes and excavations". Em: *Géotechnique* 59.10 (2009), pp. 839–850.
- [100] R. von Mises. "Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand". Em: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1913), pp. 582–592.
- [101] O. Mohr. "Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines materials?" Em: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 24 (1900), pp. 1524–1530.
- [102] G. Mollon, D. Dias e A.-H. Soubra. "Rotational failure mechanisms for the face stability analysis of tunnels driven by a pressurized shield". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 35.12 (2010), 1363–1388.
- [103] G. Mollon, D. Dias e A.-H. Soubra. "Continuous velocity fields for collapse and blowout of a pressurized tunnel face in purely cohesive soil". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 37.13 (2012), 2061–2083.
- [104] N. Monteiro. "Aplicação da análise limite ao estudo tridimensional da estabilidade de túneis em maciços respondendo em condições não drenadas". Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [105] J. Muñoz, J. Bonet, A. Huerta e J. Peraire. "Bounds and adaptivity for 3D limit analysis". Em: *7th Workshop on Numerical in Applied Science and Engineering*. Universitat Politècnica de catalunya. Vall de Núria, 2008.

-
- [106] J. J. Muñoz, J. Bonet, A. Huerta e J. Peraire. “Upper and lower bounds in limit analysis: Adaptive meshing strategies and discontinuous loading”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77.4 (2009), pp. 471–501.
- [107] A. Nadai. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. New York: McGraw-Hill book company, inc, 1963.
- [108] J. C. Nagtegaal, D. M. Parks e J. R. Rice. “On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4.2 (1974), pp. 153–177.
- [109] J. A. Nelder e R. Mead. “A Simplex Method for Function Minimization”. Em: *The Computer Journal* 7.4 (1965), pp. 308–313.
- [110] M. P. Nielsen e L. C. Hoang. *Limit Analysis and Concrete Plasticity*, third edition. CRC Press, 2010.
- [111] J. Nocedal e S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Segunda. Springer, 2000.
- [112] F. H. Norton. *The creep of steel at high temperatures*. New York: McGraw-Hill book company, inc, 1929.
- [113] F. Pastor, E. Loute e J. Pastor. “Limit analysis and convex programming: A decomposition approach of the kinematic mixed method”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.3 (2009), pp. 254–274.
- [114] J. Pastor e S. Turgeman. “Limit analysis in axisymmetrical problems: Numerical determination of complete statical solutions”. Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 24.2 (1982), pp. 95–117.
- [115] J. Pastor. “Analyse limite: Détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical”. Em: *Journal de Mécanique Appliquée* 2.2 (1978), pp. 167–188.
- [116] J. Peiró. “A finite element procedure for the solution of the Euler equations on the unstructured meshes”. Tese de doutoramento. U. K.: University of Swansea, 1989.
- [117] A. Pisano, P. Fuschi e D. D. Domenico. “Failure modes prediction of multi-pin joints FRP laminates by limit analysis”. Em: *Composites Part B: Engineering* 46 (2013), 197–206.
- [118] L. Prandtl. “Über die Härte Plastischer Körper”. Em: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, Math.-phys. Klasse* 12 (1920), pp. 74–85.
- [119] Z. G. Qian, A. J. Li, A. V. Lyamin e C. C. Wang. “Parametric studies of disturbed rock slope stability based on finite element limit analysis methods”. Em: *Computers and Geotechnics* 81 (2017), pp. 155–166.
- [120] Z. Qin e D. Goldfarb. “Structured Sparsity via Alternating Direction Methods”. Em: *Journal of Machine Learning Research* 13 (2012), pp. 1435–1468.

- [121] D. Radenkovic. “Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée”. Em: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences* 252 (1961), 4103–4104.
- [122] D. Radenkovic. “Théorie des charges limites”. Em: *Séminaire de Plasticité*. Ed. por J. Mandel. 1962, pp. 129–142.
- [123] T. Rantanen. “Influência da variabilidade das propriedades do solo na estabilidade de túneis superficiais em maciços respondendo em condições não drenadas”. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2016.
- [124] A. Reuss. “Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie”. Em: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 10.3 (1930), pp. 266–274.
- [125] D. S. Richeson. *Euler’s Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. 1ª ed. Princeton University Press, 2008.
- [126] M. C. Rivara. “Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20.4 (1984), pp. 745–756.
- [127] U. Rüde. *Mathematical and Computational Techniques for Multilevel Adaptive Methods*. Vol. 13. Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial e Applied Mathematics, 1993.
- [128] N. de Saint-Venant. “Sur les conditions pour que six fonctions des coordonnées x, y, z des points d’un corps élastiques représentent des composantes de pression s’exercant sur trois plans rectangulaires à l’intérieur de ce corps, par suite de petits changements de distance de ses parties”. Em: *L’Institut* 28 (1860), pp. 294–295.
- [129] N. de Saint-Venant. “Sur l’établissement des équations des mouvements Intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à leur premier état”. Em: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences* 70 (1870), pp. 473–480.
- [130] J. Salençon. “Théorie des charges limites: poinçonnement d’une plaque par deux poinçons symétriques en déformation plane”. Em: *Comptes Rendus Mécanique de l’Académie des Sciences Paris* 265 (1967), pp. 869–872.
- [131] J. Salençon. *De l’Élasto-plasticité au calcul à la rupture*. 1ª ed. Paris: Les Éditions de l’École Polytechnique, 2002.
- [132] R. Salgado. *The engineering of foundations*. McGraw-Hill, 2008.
- [133] R. Salgado, A. V. Lyamin, S. W. Sloan e H. S. Yu. “Two- and three-dimensional bearing capacity of foundations in clay”. Em: *Géotechnique* 54.5 (2004), pp. 297–306.
- [134] G. E. Shilov. *Linear Algebra*. Ed. por R. A. Silverman. New York: Dover Publications, 1977.

-
- [135] H. Si. *TetGen: A Quality Tetrahedral Mesh Generator and 3D Delaunay Triangulator (User's Manual version 1.5)*.
- [136] Škrabl e B Macuh. "Upper-bound solutions of three-dimensional passive earth pressures". Em: *Canadian Geotechnical Journal* 42.5 (2005), pp. 1449–1460.
- [137] M. Slater. *Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to Non-linear Programming*. Cowles Commission Discussion Paper, Mathematics No. 403, 1950.
- [138] S. W. Sloan. "Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 12.1 (1988), pp. 61–77.
- [139] S. W. Sloan. "Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 13.3 (1989), pp. 263–282.
- [140] S. W. Sloan. "Geotechnical stability analysis". Em: *Géotechnique* 63.7 (2013), pp. 531–572.
- [141] S. Sloan e P. Kleeman. "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields". Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 127.1-4 (1995), pp. 293–314.
- [142] M. Snir, S. Otto e S. Huss-Lederman. *MPI: The Complete Reference*. Ed. por M. Press. 1996.
- [143] P. L. Tallec. "Numerical Solution of Viscoplastic Flow Problems by Augmented Lagrangians". Em: *IMA Journal of Numerical Analysis* 6.2 (1986), pp. 185–219.
- [144] S. Tangaramvong. "Limit analysis of elastoplastic frames considering 2nd-order geometric nonlinearity and displacement constraints". Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 51.3 (2009), pp. 179–191.
- [145] K. Terzaghi. *Theoretical soil mechanics*. Ed. por J. Wiley e Sons. 2ª ed. New York, 1943.
- [146] S. Timoshenko e J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. Segunda Edição. McGraw-Hill, 1951.
- [147] M. H. Tresca. "Mémoire sur d'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions". Em: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 59 (1864), pp. 754–758.
- [148] P. Tseng. *Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Convex Programming and Variational Inequalities*. Rel. téc. LDIS-P-1836. MIT, 1988.
- [149] S. Turgeman e J. Pastor. "Limit analysis: A linear formulation of the kinematic approach for axisymmetric mechanic problems". Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 6.1 (1982), pp. 109–128.

- [150] H. Uzawa. "Iterative methods for concave programming". Em: *Studies in linear and nonlinear programming*. Ed. por K. J. Arrow, L. Hurwicz e H. Uzawa. Stanford University Press, 1958. Cap. 10, pp. 154–165.
- [151] M. Vicente da Silva. "Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite". Tese de doutoramento. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [152] M. Vicente da Silva e A. N. Antão. "A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72.10 (2007), pp. 1192–1218.
- [153] M. Vicente da Silva e A. N. Antão. "Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation". Em: *International Journal of Solids and Structures* 45.22-23 (2008), pp. 5788–5804.
- [154] M. Vicente da Silva e A. N. Antão. "A novel augmented Lagrangian-based formulation for upper-bound limit analysis". Em: *International Journal For Numerical Methods in Engineering* 89.12 (2012), pp. 1471–1496.
- [155] L. Viotty. "Avaliação da capacidade resistente de placas de ancoragem em condições drenadas". Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2015.
- [156] S. L. Wang e L. Z. Liao. "Decomposition Method with a Variable Parameter for a Class of Monotone Variational Inequality Problems". Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 109.2 (2001), pp. 415–429.
- [157] R. C. Whaley e A. Petitet. "Minimizing development and maintenance costs in supporting persistently optimized BLAS". Em: *Software: Practice and Experience* 35.2 (2005), pp. 101–121.
- [158] D. W. Wilson, A. J. Abbo, S. W. Sloan e A. V. Lyamin. "Undrained stability of a circular tunnel where the shear strength increases linearly with depth". Em: *Canadian Geotechnical Journal* 48.9 (2011), pp. 1328–1342.
- [159] A. S. Wineman e A. C. Pipkin. "Material symmetry restrictions on constitutive equations". Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 17.3 (1964), pp. 184–214.
- [160] H. S. Yu, S. W. Sloan e P. W. Kleeman. "A quadratic element for upper bound limit analysis". Em: *Engineering Computations* 11.3 (1994), pp. 195–212.
- [161] H.-S. Yu. *Cavity Expansion Methods in Geomechanics*. Ed. por Chapman e Hall. Springer-Science+Business Media, B.Y., 2000.
- [162] H. Yu. "Expansion of a thick cylinder of soils". Em: *Computers and Geotechnics* 14.1 (1992), pp. 21–41.
- [163] F. Zhang, ed. *The Schur Complement and Its Applications*. Vol. 4. New York: Springer, 2005.

- [164] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor. *The Finite Element Method*. 5^a ed. Vol. 1 - The Basis. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [165] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.7 (1992), pp. 1331–1364.
- [166] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu. "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33.7 (1992), pp. 1365–1382.
- [167] N. Zouain, J. Herskovits, L. A. Borges e R. A. Feijóo. "An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions". Em: *International Journal of Solids and Structures* 30.10 (1993), pp. 1397–1417.

Apêndice A

Equilíbrio no elemento de extensão 2D do tipo unidirecional: elemento quadrilátero

Em comparação à hipótese correntemente utilizada, que corresponde em dividir o elemento quadrilátero em dois elementos triangulares (figura 4.5), onde o equilíbrio é verificado em todo o elemento, pode-se de igual forma impor o equilíbrio no elemento de extensão 2D do tipo unidirecional diretamente no elemento quadrilátero, ilustrado na figura A.1.

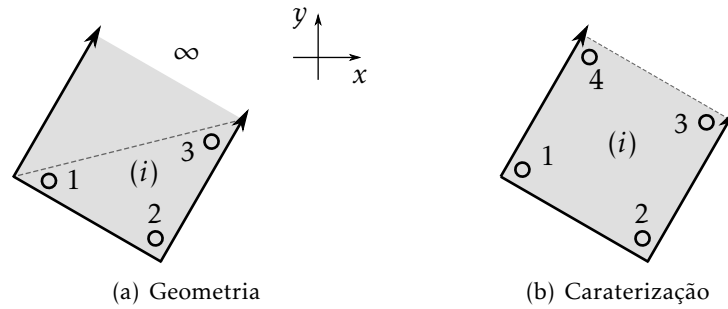


Figura A.1: Elemento especial 2D do tipo unidirecional (versão alternativa)

Neste caso, o elemento quadrilátero i é caracterizado por uma distribuição de tensões bilinear logo, cada nó j verifica a seguinte equação,

$$s_j = \kappa_1 + \kappa_2 x_j + \kappa_3 y_j + \kappa_4 x_j y_j \quad (\text{A.1})$$

Desta forma, para se obter a mesma distribuição de tensões que nos elementos triangulares (distribuição linear), equação (4.71), basta anular o termo bilinear ($\kappa_4 = 0$) na equação (A.1). Esta conversão ocorre naturalmente considerando, para isso, que as arestas de extensão 1 – 4 e 2 – 3 são paralelas. Deste modo, como o elemento de extensão é definido pelas mesmas propriedades nodais ($s_1, s_2, ds_{23}, ds_{14}$), o operador de equilíbrio é definido

da seguinte forma,

$$[-D\phi^{(i)} | \hat{F}^{(i)}] = \begin{bmatrix} -(D\phi_1^{(i)} + D\phi_4^{(i)}) & -(D\phi_2^{(i)} + D\phi_3^{(i)}) & -D\phi_3^{(i)} & -D\phi_4^{(i)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Neste caso a matriz de equilíbrio no nó j , $-D\phi_j^{(i)}$, é definida da seguinte forma,

$$-D\phi_j^{(i)} = \begin{bmatrix} \kappa_j^x & 0 & \kappa_j^y \\ 0 & \kappa_j^y & \kappa_j^x \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{A.3})$$

onde κ_j^x, κ_j^y representam os parâmetros de forma obtidos por permutação cíclica da seguinte expressão,

$$\begin{bmatrix} \kappa_j^x \\ \kappa_j^y \end{bmatrix}_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{\xi}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{\xi}} \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{\eta}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{\eta}} \end{bmatrix}_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\xi}} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\eta}} \end{bmatrix}_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \quad (\text{A.4})$$

O raciocínio subjacente à obtenção destes parâmetros, equação A.4, difere um pouco do apresentado anteriormente nos elementos triangulares, porque as funções de forma, ϕ , não são funções diretas de x e y , mas sim das coordenadas naturais $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$. Consequentemente é necessário recorrer à multiplicação da inversa do Jacobiano pelo vetor formado pelas derivadas das funções de forma em ordem às variáveis naturais [164].

Por simplicidade de demonstração, estes parâmetros de forma foram deduzidos considerando que se tratava de um quadrilátero regular (todos os lados apresentam a mesma dimensão), logo a equação matricial (A.4) resulta,

$$\begin{bmatrix} \kappa_j^x \\ \kappa_j^y \end{bmatrix}_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})} = \frac{1}{2A_{jlmn}^{(i)}} \begin{bmatrix} (y_l - y_m)CN_1[j] + (y_m - y_n)CN_2[j] - y_l + y_n \\ (x_m - x_l)CN_1[j] + (x_n - x_m)CN_2[j] - x_n + x_l \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

sendo $A_{jlmn}^{(i)}$ a área do elemento definida pelos nós j - l - m - n e $CN_1[j], CN_2[j]$ a posição j nos vetores das coordenadas naturais,

$$CN_1 = \begin{bmatrix} \bar{\eta} \\ -\bar{\xi} \\ -\bar{\eta} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} ; \quad CN_2 = \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ -\bar{\xi} \\ -\bar{\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tendo em conta estas definições, chega-se à conclusão que a matriz de equilíbrio obtida (A.2) apresenta muitas semelhanças com a referente ao elemento triangular (4.73). Mais precisamente, nos nós regulares 1 e 2 a matriz de equilíbrio obtida, corresponde exatamente à definida nos elementos triangulares e nos nós de extensão 3 e 4 a soma das respectivas matriz de equilíbrio equivale à matriz de equilíbrio do nó 3 do elemento de extensão triangular. Estas propriedades são facilmente verificadas porque no elemento quadrilátero não só os termos afetados pelas coordenadas naturais se anulam, como as

grandezas resultantes correspondem ao dobro do caso triangular. Assim a equivalência entre as duas formulações verifica-se devido à seguinte expressão:

$$A_{jlmn}^{(i)} = 2A_{jlm}^{(i)} \quad (\text{A.7})$$

Basicamente o elemento de extensão triangular (figura 4.5) corresponde a um elemento de extensão quadrilátero em que as propriedades de extensão em vez de serem repartidas pelos dois nós de extensão apenas se encontram no único nó de extensão. Mais precisamente, o elemento triangular resulta, considerando que os parâmetros de forma do elemento quadrilátero são obtidos nas seguintes coordenadas naturais ($\bar{\xi} = 1, \bar{\eta} = -1$), ilustrado na figura A.2.

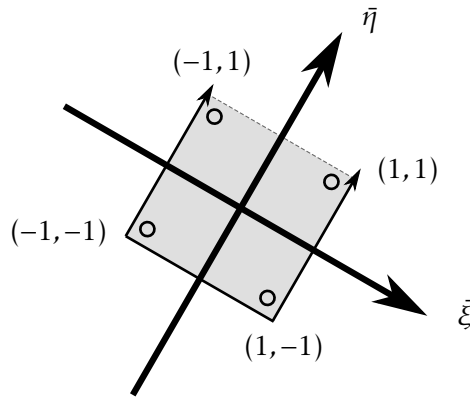


Figura A.2: Elemento quadrilátero no referencial natural